

# Praktikum Kernphysik

Sommersemester 2011

Justus Liebig Universität Gießen

## Versuch 7: $\gamma\gamma$ - Winkelkorrelation

Stefan Diehl, Diego Semmler, Nils Stöckmann

23. Mai 2011



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Entstehung und Energie von Gammastrahlung . . . . .	3
2.2	Klassische Betrachtung der Multipolstrahlung und ihrer Eigenschaften . . . . .	4
2.3	Kernniveauschema von $^{60}\text{Ni}$ . . . . .	7
2.4	Wechselwirkung von Gammastrahlung mit Materie . . . . .	9
2.4.1	Fotoeffekt . . . . .	10
2.4.2	Comptoneffekt . . . . .	11
2.4.3	Paarbildung . . . . .	12
2.4.4	Vergleich der 3 Wechselwirkungseffekte . . . . .	13
2.4.5	Abschwächung von Photonen in Materie . . . . .	13
2.5	Gammaspektroskopie . . . . .	14
2.5.1	Szintillationsdetektoren . . . . .	14
2.5.2	Weitere Detektionsmöglichkeiten für Gammastrahlung . . . . .	17
2.6	Winkelverteilung von Multipolstrahlung . . . . .	18
2.7	$\gamma\gamma$ -Winkelverteilung . . . . .	22
2.8	$\gamma\gamma$ -Winkelverteilung der $4^+ - 2^+ - 0^+$ -Kaskade in $^{60}\text{Ni}$ . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>29</b>
3.1	Anordnung der Detektoren und der radioaktiven Quelle . . . . .	29
3.2	Blockschalbild und Einstellung der beiden NaJ:Tl - Detektoren . . . . .	30
3.2.1	Module der Ausleseelektronik . . . . .	30
3.2.2	Aufbau der Auslekette . . . . .	31

<b>4</b>	<b>Messungen und Ergebnisse</b>	<b>33</b>
4.1	Einstellung der Signalverstärkung anhand des Spektrums von $^{60}\text{Co}$ . . . . .	33
4.2	Einstellung des Discriminators anhand des Spektrums von $^{60}\text{Co}$ . . . . .	34
4.3	Optimierung der Zeitverzögerung . . . . .	35
4.4	Messung der $^{60}\text{Ni}$ - $\gamma$ - $\gamma$ -Winkelverteilung . . . . .	36
4.4.1	Zufällige Koinzidenzen . . . . .	36
4.4.2	Bestimmung der normierten Zählrate . . . . .	38
4.4.3	Vergleich mit der theoretischen Winkelverteilung . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>41</b>

# Abstract

In diesem Versuch wird die  $\gamma\gamma$ -Winkelverteilung der  $4^+ - 2^+ - 0^+$ -Kaskade von  $^{60}\text{Co}$  in  $^{60}\text{Ni}$  gemessen. Hierzu werden die beiden in dieser Kaskade emittierten Gammaquanten mittels zweier Szintillationsdetektoren koinzident nachgewiesen. Aus dem zwischen den beiden  $\gamma$ -Detektoren eingestellten Relativwinkel und der Koinzidenzzählrate unter diesem Winkel ergibt sich schließlich die Winkelverteilung der emittierten Gammaquanten relativ zueinander. Die so gemessene Winkelverteilung wird schließlich mit der aus der Theorie berechneten Winkelverteilung verglichen.



# Kapitel 1

## Einführung

Im Jahr 1900 wurde durch den französischen Physiker und Chemiker Paul Villard eine Strahlung hoher Energie entdeckt, die ihren Ursprung in den Kernen der Atome hat und die  $\gamma$ -Strahlung genannt wurde. Wenige Jahre später (1914) konnten Ernest Rutherford und Edward Andrade die elektromagnetische Natur dieser Strahlung nachweisen. Diese neu entdeckte hochenergetische Quantenstrahlung ist wie andere Strahlungsarten ( $\alpha$ ,  $\beta$  usw.) für den Menschen zunächst nicht wahrnehmbar, da er hierfür kein Sinnesorgan besitzt, daher ist man seit jeher bemüht Detektoren zu entwickeln, welche diese Strahlung möglichst effektiv nachweisen und charakterisieren können. Die in diesem Versuch eingesetzten Szintillationsdetektoren gehörten zu den ersten Instrumenten zum Nachweis radioaktiver Strahlung. Seit dem Beginn der Erforschung der Atomkerne und später deren elementaren Bestandteile in der Hochenergiephysik, spielt Gamma- und Teilchenstrahlung auch in der Wissenschaft eine entscheidende Rolle, da ihr Nachweis die Grundlage zur Untersuchung von elementaren Teilchenprozessen und Kernreaktionen darstellt. Durch die Detektion der bei einem kernphysikalischen Prozess wie zum Beispiel der Abregung des Kerns emittierten Gammaquanten kann neben der Verteilung der Energieniveaus im Kern auch die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den einzelnen Energieniveaus und deren Drehimpuls und Parität bestimmt werden. Kann durch die Fixierung der Spinrichtung des Kerns oder durch die Messung zweier in einer  $\gamma$ -Kaskade korrelierter Quanten eine z-Richtung ausgezeichnet werden, so ist es auch möglich die Winkelverteilung der Strahlung relativ zu dieser Richtung zu bestimmen, was in diesem Versuch für den konkreten Fall der  $4^+ - 2^+ - 0^+$ -Kaskade von  $^{60}\text{Co}$  in  $^{60}\text{Ni}$  durchgeführt werden soll.

Im ersten Kapitel dieser Auswertung wird zunächst auf die theoretischen Grundlagen wie die Entstehung, Wechselwirkung und Detektion der Gammastrahlung eingegangen. Weiterhin werden hier die aus der elektromagnetischen Natur der Gammastrahlung resultierenden Eigenschaften diskutiert und theoretische Modelle zur Beschreibung der Winkelverteilung der Gammastrahlung in Abhängigkeit ihrer Multipolordnung eingeführt und diskutiert. Im 2. Kapitel wird schließlich der für die Messung verwendete experimentelle Aufbau und die zugehörige Ausleseelektronik genauer betrachtet. Im 3. Kapitel wird dann zunächst das Gammaspektrum von  $^{60}\text{Co}$  betrachtet und anhand dieses Spektrums die optimalen Einstellungen der elektronischen Signalverarbeitung diskutiert. Schließlich wird die experimentell aufgenommene Winkelverteilung dargestellt und mit der theoretischen Vorhersage verglichen.



# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen zunächst die zum Verständnis der Natur der Gammastrahlung und deren Winkelverteilung benötigten physikalischen Grundlagen, wie die Entstehung und Energie von Gammastrahlung deren Multipolcharakter und deren Wechselwirkung mit Materie erläutert werden, bevor im Anschluss auf die theoretisch zu erwartende Winkelverteilung in Abhängigkeit der Multipolordnung eingegangen wird.

### 2.1 Entstehung und Energie von Gammastrahlung

Ähnlich wie die Elektronenhülle der Atome ist auch der Atomkern durch diskrete Energieniveaus charakterisiert. Übergänge zwischen diesen Energieniveaus können durch Emission oder Absorption von elektromagnetischer Strahlung der entsprechenden Energie, also genau der Energie, die der Energiedifferenz zwischen den Energieniveaus des Atomkerns entspricht, erreicht werden. Die Energie der dabei emittierten Photonen reicht vom Kiloelektronenvoltbereich bis hin zu etwa 10 Megaelektronenvolt, mit der Plank'schen Konstante  $h$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  entspricht dies nach

$$E_\gamma = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} \quad (2.1)$$

einem Wellenlängenbereich  $\lambda_\gamma$  von  $10^{-10}$  m bis  $10^{-13}$  m, welcher im Bereich unterhalb der charakteristischen Größe eines Atoms liegt. Solche hochenergetischen Photonen werden historisch bedingt Gammastrahlung genannt. Bei Gammastrahlung handelt es sich wie beim sichtbaren Licht und der Röntgenstrahlung um eine elektromagnetische Strahlung. Abbildung 2.1 zeigt, dass Gammastrahlung energetisch oberhalb der Röntgenstrahlung im elektromagnetischen Spektrum einzuordnen ist.

Gammastrahlung tritt häufig als Begleiterscheinung von  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfällen auf, wobei der Atomkern überschüssige, noch vorhandene Anregungsenergie in Form eines oder mehrerer Gammaquanten abgibt und von einem höheren (angeregten) zu einem niedrigeren Energieniveau übergeht. Während sich beim einem primären  $\beta$ -Zerfall die Kernladungszahl und bei einem  $\alpha$ -Zerfall auch die Massenzahl ändert, wird durch einen Gammazerfall lediglich der

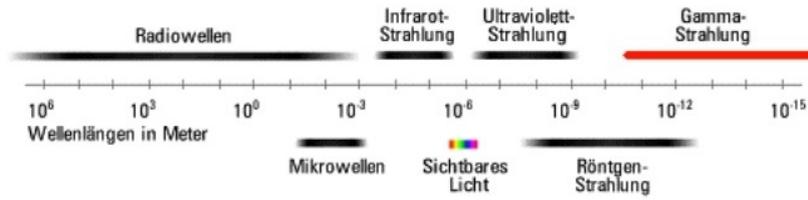


Abbildung 2.1: Spektrum der elektromagnetischen Strahlung

Energieinhalt des Kerns, nicht jedoch die Kernladungs- oder Massenzahl verändert, was in der folgenden Zerfallsgleichung verdeutlicht wird.



Hierbei stehen die Sternchen am Elementsymbol für den Grad der Anregung des Isotops. Da im Kern diskrete Energieniveaus vorliegen, wird beim Gammazerfall Strahlung mit diskreten Energien emittiert, welche charakteristisch für den jeweiligen Kern sind. Die Gesamtheit der möglichen Übergänge eines Kerns liefert somit eine Linienspektrum. Die so entstandenen Gammaquanten können je nach der Zustandsänderung im Kern, bei der Sie entstanden sind durch die Energie  $E$ , den Spin  $I$  und die Parität  $\pi$  charakterisiert werden (Hierzu in Abschnitt 2.2 mehr).

Eine weitere Möglichkeit für die rein energetische Abregung des Kerns stellt die innere Konversion dar, bei welcher der Kern seine überschüssige Energie durch ein virtuelles Photon auf ein Hüllenelektron überträgt.



Im Gegensatz zur Atomhülle, in der eine Abregung auch durch eine ganze Reihe anderer Prozesse, wie zum Beispiel durch Teilchenstöße erfolgen kann, gibt es im Kern keine weiteren Abregungsmöglichkeiten, was bei der Diskussion der beobachtbaren Multipolordnungen noch eine Rolle spielen wird. Um die Eigenschaften der Gammastrahlung genauer beschreiben zu können wird gewöhnlich die Quantenelektrodynamik herangezogen, welche es auch ermöglicht aus den Wechselwirkungen zwischen den quantisierten elektromagnetischen Feldern und den Kernzuständen, Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den verschiedenen Energieniveaus zu berechnen. Um einige phänomenologische Erkenntnisse zu erlangen, soll die Gammastrahlung im folgenden Abschnitt jedoch zunächst mittels der klassischen Elektrodynamik beschreiben werden.

## 2.2 Klassische Betrachtung der Multipolstrahlung und ihrer Eigenschaften

In der klassischen Elektrodynamik resultiert die Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle aus einer Änderung der Energie durch eine Änderung der Ladungs- und Stromverteilung des Systems. Um eine Wellengleichung für elektromagnetische Wellen zu finden, muss die Maxwell-Gleichung im quellenfreien Raum gelöst werden. Diese sind im CGS-System durch die Gleichungen 2.4 bis 2.7 gegeben.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\dot{\vec{B}}}{c} \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\dot{\vec{E}}}{c} \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.7)$$

wobei  $\vec{E}$  das elektrische Feld,  $\vec{B}$  das magnetische Feld und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit darstellen. Die ersten beiden Gleichungen sind hierbei für uns von Interesse, sie beschreiben dass eine zeitliche Änderung des einen Feldes ( $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$  zu einem Wirbelfeld des jeweils anderen Typs führen. Die letzten beiden Gleichungen spiegeln hingegen nur die angenommene Quellenfreiheit wieder.

Nimmt man nun an, dass die Felder mit  $\exp(-i\omega t)$  oszillieren, so ergeben sich mit der Beziehung  $\omega = kc$  aus den ersten beiden Gleichungen, die folgenden Ausdrücke:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = ik\vec{B} \quad (2.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -ik\vec{E} \quad (2.9)$$

Durch Anwendung der Rektion

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F} \quad (2.10)$$

in welcher  $\vec{F}$  ein beliebiges Feld darstellt, ergeben sich nach Elimination von  $\vec{E}$  die Gleichungen:

$$(\Delta + k^2)\vec{B} = 0; \quad \vec{E} = \frac{i}{k}\vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (2.11)$$

und durch Elimination von  $\vec{B}$  die Gleichungen:

$$(\Delta + k^2)\vec{E} = 0; \quad \vec{B} = -\frac{i}{k}\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (2.12)$$

Da die Kernzustände, zwischen denen Übergänge betrachtet werden sollen meist als Eigenfunktionen des Drehimpulses und der Parität gegeben sind, soll im folgenden nach Lösungen in Form von Drehimpulseigenfunktionen gesucht werden. Geht man von einem kugelsymmetrischen Problem aus, so lautet die allgemeine Lösung der skalaren Wellengleichung [Sch98]:

$$\Psi_l^m = f_l(kr) \cdot Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.13)$$

Der Ausdruck  $f_l(kr)$  repräsentiert hierbei den Radialanteil der Lösung und kann im wesentlichen durch eine sphärische Besselfunktion beschrieben werden.  $Y_l^m(\theta, \phi)$  stellt hingegen den Winkelabhängigen Teil der Lösung dar und kann durch Kugelflächenfunktionen beschrieben werden. Der Index  $l$  stellt hierbei den Bahndrehimpuls und  $m$  dessen  $z$ -Komponente dar.

## 2.2 Klassische Betrachtung der Multipolstrahlung und ihrer Eigenschaften

---

Durch Anwenden des Drehimpulsoperators  $\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$  ergeben sich Lösungen der Form [MRR95]:

$$\vec{B}_l^m = f_l \vec{L} Y_l^m; \quad \vec{E}_l^m = \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}_l^m \quad (2.14)$$

$$\vec{E}_l^m = f_l \vec{L} Y_l^m; \quad \vec{B}_l^m = \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{E}_l^m \quad (2.15)$$

Diese Lösungen, welche Eigenfunktionen zu einem bestimmten Drehimpuls sind, nennt man Multipolfelder, da sie dem Strahlungsfeld eines klassischen schwingenden  $2^l$ -Pols (Multipol  $l$ -ter Ordnung) entsprechen.

In normierter Form ergibt sich die folgende Gestalt [MRR95]:

$$\vec{X}_l^m = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{L} Y_l^m \quad (2.16)$$

Die beiden angegebenen Lösungen bilden eine vollständige Basis des Systems, so dass es möglich ist beliebige Felder danach zu entwickeln. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen elektrischen und magnetischen Multipolfeldern, bei denen jeweils der elektrische und der magnetische Feldvektor gegeneinander vertauscht sind. Dies hat zur Folge, dass bei elektrischer Dipolstrahlung keine Radialkomponenten des magnetischen Feldes und bei magnetischer Dipolstrahlung keine Radialkomponenten des elektrischen Feldes auftreten. Für ein magnetisches Feld ergibt sich in der Entwicklung nach der angegebenen Basis die folgende Gestalt [MRR95]:

$$\vec{B} = \sum_{l,m} \left[ a(l,m) f_l \vec{X}_l^m - b(l,m) \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times f_l \vec{X}_l^m \right] \quad (2.17)$$

wobei die Koeffizienten  $a(l,m)$  und  $b(l,m)$  die Amplituden der jeweils zum Feld beitragenden Multipolstrahlung angeben. Da hohe Multipolordnungen geringere Übergangswahrscheinlichkeiten aufweisen, werden oft nur Übergänge niedriger Multipolordnungen beobachtet. Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über die Wahrscheinlichsten Multipolordnungen der Gammastrahlung als Funktion der Drehimpuls- und Paritätsänderungen der Zustände [MRR95].

Spinänderung $ \Delta I $	0, kein, $0 \rightarrow 0$	1	2	3	4	5
ja	E1 (M2)	E1 (M2)	M2 (E3)	E3 (M4)	M4 E5	E5 (M6)
Paritätsänderung nein	M1 E2	M1 E2	E2 (M3)	M3 E4	E4 (M5)	M5 E6

Tabelle 2.1: Überblick über die Wahrscheinlichsten Multipolordnungen der Gammastrahlung als Funktion der Drehimpuls- und Paritätsänderungen der Zustände

Nachdem nun eine grundlegende Beschreibung der Gammastrahlung gefunden wurde, sollen im folgenden einige Erhaltungsgrößen diskutiert werden, welche direkt aus den üblichen Erhaltungssätzen folgen und zu einigen Auswahlregeln beim Kernzerfall führen.

**Energieerhaltung:** Bei der Änderung des Kernzustandes von  $E$  nach  $\tilde{E}$  und der Emission von  $\gamma$ -Strahlung muss für den Energieübertrag gelten [Leo87]:

$$E_\gamma = h \cdot \nu = E - \tilde{E} - E_R \quad (2.18)$$

Wobei  $E$  das Energieniveau des Kerns vor dem Übergang,  $\tilde{E}$  das Energieniveau des Kerns nach dem Übergang und  $E_R$  die Rückstoßenergie beschreiben. Da die Rückstoßenergie im Vergleich zur Energie der Gammastrahlung vernachlässigbar klein ist, kann man anhand der emittierten Gammalinien Rückschlüsse auf die vorliegenden Kerne und ihre energetischen Zustände ziehen.

**Drehimpulserhaltung:** Beim Übergang eines Zustandes mit Spin  $I_i$  nach  $I_f$  wird die Spindifferenz der Zustände als Drehimpuls  $l = L_\gamma$  an das Gammaquant abgegeben, daher gelten die folgenden Auswahlregeln für den Drehimpuls [Leo87]:

$$|I_i - I_f| \leq l \leq |I_i + I_f|; \quad m = m_i - m_f \quad (2.19)$$

Da Gammaquanten als Bosonen einen ganzzahligen Spin besitzen gilt zusätzlich die Auswahlregel [Leo87]:

$$\Delta I = L_\gamma = \xi \cdot l\hbar \quad \text{mit} \quad \xi \in \mathbb{N} \quad (2.20)$$

Die Ordnung  $n = \xi \cdot l \in \mathbb{N}$  des Drehimpulses des emittierten Gammaquants entspricht hierbei gerade der Multipolordnung (E1, M1, E2, M2,...) des Kernübergangs. Aufgrund der Komplexität eines Atomkerns treten im Vergleich zur Lichtemission bei Hüllenübergängen statt einfacher Dipolstrahlung ( $n=1$ ) oft Multipolstrahlungen höherer Ordnung auf.

**Paritätserhaltung:** Betrachtet man den Kernübergang von der Parität  $\pi_i$  zur Parität  $\pi_f$ , so ergeben sich unter Berücksichtigung der Paritätserhaltung für elektrische Multipolstrahlung ( $\pi = (-1)^l$ ) und magnetische Multipolstrahlung ( $\pi = (-1)^{l+1}$ ) die folgenden Auswahlregeln [Leo87]:

$$\pi_i = \begin{cases} (-1)^l \cdot \pi_f & \text{für elektrische Multipolstrahlung} \\ (-1)^{l+1} \cdot \pi_f & \text{für magnetische Multipolstrahlung} \end{cases} \quad (2.21)$$

Aus 2.21 folgt direkt, dass elektrische und magnetische Multipolstrahlung nicht gleichzeitig auftreten können. Indem man die Parität der Zustandsfunktionen und die Ordnung der Multipolstrahlung bestimmt, kann man auf die vorliegende Strahlungsart schließen.

## 2.3 Kernniveauschema von $^{60}\text{Ni}$

In einem Kernniveauschemata wird ein Nuklid mit seinen Zerfallsmöglichkeiten dargestellt. Die für den durchgeführten Versuch wichtigsten Informationen, die man einem solchen Schema entnehmen kann, sind neben den Energien der verschiedenen Gammaübergänge und deren

## 2.3 Kernniveauschema von $^{60}\text{Ni}$

relative Häufigkeiten auch die Drehimpulse und Paritäten der einzelnen Energieniveaus und die Multipolordnung der emittierten Gammastrahlung. Im folgenden Abschnitt ist daher das Zerfallsschema vom  $^{60}\text{Co}$  in  $^{60}\text{Ni}$  dargestellt, in welchem die für diesen Versuch interessante  $4^+ - 2^+ - 0^+$ -Kaskade abläuft.

Das Kernniveauschema in Abbildung 2.2 zeigt neben den Grundzuständen von  $^{60}\text{Co}$  und  $^{60}\text{Ni}$  auch die 3 angeregten Zustände von  $^{60}\text{Ni}$ .

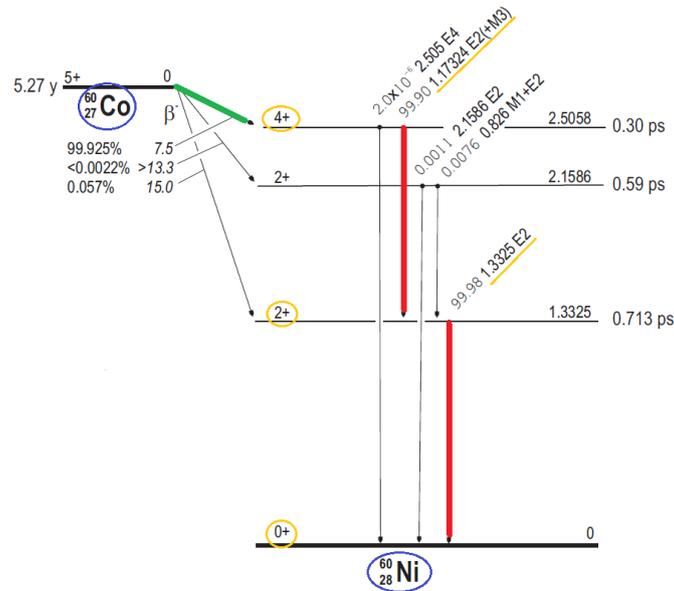


Abbildung 2.2: Niveauschema des  $^{60}\text{Co}$ -Präparats [An11]

Das Niveauschema zeigt, dass der  $^{60}\text{Co}$  - Kern mit einer Halbwertszeit von 5,27 Jahren und einer Zustandsquantenzahl von  $0^+$  (Drehimpuls 0 und Parität +1) zunächst in einem primären  $\beta^-$ -Zerfall (grün markiert) ein Elektron und ein Antielektronenneutrino aussendet. Der

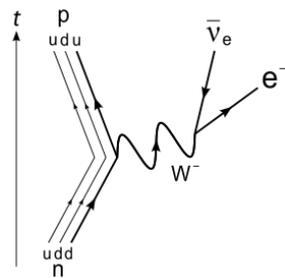


Abbildung 2.3:  $\beta^-$ -Zerfall eines Neutrons in ein Proton

resultierende  $^{60}\text{Ni}$  - Kern befindet sich hiernach mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,925 % im obersten angeregten Zustand (2,5058 MeV). Die anderen beiden Primärübergänge sind auf Grund ihrer geringen Wahrscheinlichkeit ( $\ll 1\%$ ) für diesen Versuch vernachlässigbar. Aus diesem Zustand besteht nun eine Wahrscheinlichkeit von über 99,9 %, dass es zu der zu Untersuchenden  $4^+ - 2^+ - 0^+$ -Kaskade kommt. Hierbei regt sich der Kern zunächst aus

dem oberen  $4^+$ -Niveau in das untere  $2^+$ -Zwischenniveau ab und emittiert dabei ein Quant elektrischer Dipolstrahlung bzw. mit deutlich geringerer Wahrscheinlichkeit auch magnetische Multipolstrahlung mit einer Energie von 1173 keV. Aus diesem Zwischenniveau setzt sich die Abregung dann unter Emission eines weiteren Quants elektrische Dipolstrahlung mit einer Energie von 1333 keV in den  $0^+$ -Grundzustand von  $^{60}\text{Ni}$  fort. Näherungsweise soll im folgenden von 2 reinen elektrischen Dipolübergängen ausgegangen werden. Alle anderen Übergänge bei denen ein Gammaquant frei wird können wieder auf Grund der geringen Wahrscheinlichkeit vernachlässigt werden. Die Übergänge bei denen die beiden Gammaquanten frei werden sind im Niveauschema rot markiert.

## 2.4 Wechselwirkung von Gammastrahlung mit Materie

Da die Gammastrahlung im vorliegenden Versuch detektiert werden muss, soll im folgenden zunächst eine kurze Abhandlung der Wechselwirkungseffekte von Gammastrahlung mit Materie folgen. Beim Durchgang von Gammastrahlung durch Materie verliert diese durch die Wechselwirkung mit Kernen und Hüllenelektronen an Intensität. Es gibt eine Vielzahl von Wechselwirkungen die  $\gamma$ -Quanten mit Materie eingehen, jedoch wollen wir uns hier nur den Wichtigsten, also den im für uns interessante Energiebereich wahrscheinlichsten Wechselwirkungen, widmen. Dies sind Fotoeffekt, Comptonstreuung und Paarbildung. Je nach Energie haben diese Effekte einen unterschiedlichen Wirkungsquerschnitt. In Abbildung 2.4 ist der Wirkungsquerschnitt für die einzelnen Effekte und für die gesamte Wechselwirkung, die sich als Summer der drei Wechselwirkungseffekte bei der jeweiligen Energie ergibt, dargestellt. Die Abbildung zeigt den Wirkungsquerschnitt in beliebigen Einheiten über dem Logarithmus der Gammaenergie.

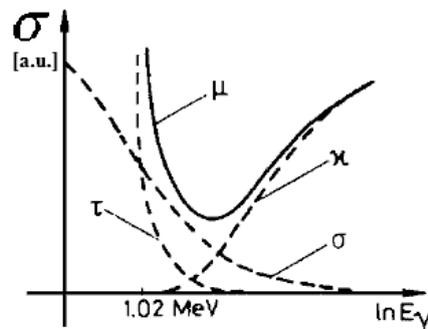


Abbildung 2.4: Wechselwirkungsquerschnitte für Gammastrahlung mit Materie.  $\tau$  : Fotoeffekt,  $\sigma$  : Comptoneffekt,  $\kappa$  : Paarbildung,  $\mu$  : Gesamtwirkungsquerschnitt ( $\mu = \tau + \sigma + \kappa$ ) [MRR95]

Man erkennt, dass der Photoeffekt hauptsächlich bei niederenergetischer Gammastrahlung relevant ist. Bei höheren Energien sinkt der Wirkungsquerschnitt auf ein vernachlässigbares Niveau ab. Der Comptoneffekt hingegen tritt zwar auch schon bei kleineren Gammaenergien auf, spielt hier jedoch aufgrund der Dominanz des Photoeffekts nur eine untergeordnete Rolle. Nur bei mittleren Gammaenergien im MeV-Bereich ist er gegenüber den anderen beiden Effekten dominant. Bei höheren Gammaenergien kommt dieser Effekt ebenfalls nahezu zum Erliegen. Ab einer Minimalenergie von etwas über 1,02 MeV tritt schließlich die Paarerzeugung auf und gewinnt schnell an Bedeutung, bis Sie schließlich bei höheren Energien fast

ausschließlich auftritt. Im folgenden Abschnitt soll nun auf die Prozesse, die bei den einzelnen Wechselwirkungen ablaufen und auf die Gründe der angesprochenen Energieabhängigkeit genauer eingegangen werden.

### 2.4.1 Fotoeffekt

Beim Fotoeffekt wird ein mit der Energie  $E_B^{(i)}$  gebundenes Hüllenelektron aus der  $i$ -ten Schale der Elektronenhülle aufgrund der vollständigen Absorption der Energie eines auftreffenden  $\gamma$ -Quants emittiert. Die kinetische Energie des emittierten Elektrons entspricht der Gammaenergie  $E_\gamma$  des absorbierten Gammaquants, verringert um die Bindungsenergie  $E_B^{(i)}$ .

$$E_{Kin,e^-} = E_\gamma - E_B^{(i)} \quad \text{mit} \quad E_\gamma = h \cdot \nu \quad (2.22)$$

Aufgrund der Impulserhaltung wird ein Teil des Photonenimpulses auf das Atom übertragen. Daher kann der Fotoeffekt nicht an freien Elektronen stattfinden, weshalb die Absorptionskurve gerade da maximal wird, wo die Energie des  $\gamma$ -Quants genau der Bindungsenergie einer Schale entspricht (Resonanzen bei  $E_\gamma = E_B^{(i)}$ ). Hierbei wird auch deutlich, dass der Photoeffekt an inneren Schalen aufgrund der größeren Nähe zum Atomkern und der dadurch bedingten höheren Absorptionsfähigkeit für den Rückstoßimpuls, wahrscheinlicher ist als an äußeren Schalen. Abbildung 2.5 zeigt eine schematische Darstellung des beim Fotoeffekt ablaufenden Prozesses.

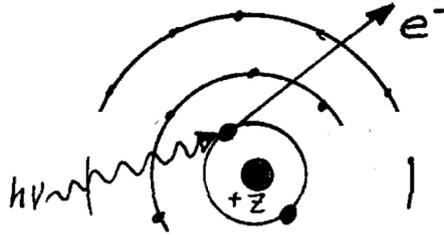


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung des Fotoeffektes [NNK11]

Für den Wirkungsquerschnitt gilt [MRR95]:

$$\tau/cm^2 = \begin{cases} 4\sqrt{2} \cdot \alpha^4 \cdot \sigma_0 \cdot \frac{Z^5}{\left(\frac{E_\gamma}{m_e \cdot c^2}\right)^{\frac{7}{2}}} \approx \frac{Z^5}{E_\gamma^{\frac{7}{2}}} & E_\gamma > E_B^{(i)} \\ 1.5 \cdot \alpha^4 \cdot \sigma_0 \cdot \frac{Z^5}{\frac{E_\gamma}{m_e \cdot c^2}} \approx \frac{Z^5}{E_\gamma} & E_\gamma \gg E_B^{(i)} \end{cases} \quad (2.23)$$

mit  $\sigma_0 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \frac{e^2}{m_e \cdot c^2}$ , der Elektronenmasse  $m_e$  und der Feinstrukturkonstanten  $\alpha = \frac{1}{137}$ .

Die Tatsache, dass der Wirkungsquerschnitt des Fotoeffektes umgekehrt proportional zur Gammaenergie aber proportional zu  $Z^5$  ist, zeigt, dass diese Wechselwirkung gerade bei energiearmen Gammaquanten und schweren Elementen mit hoher Ordnungszahl auftritt. Die hohe Abhängigkeit von der Ordnungszahl, lässt sich durch die Wechselwirkung der Hüllenelektronen untereinander erklären.

### 2.4.2 Comptoneffekt

Der Compton-Effekt beschreibt einen elastischen Stoß zwischen einem Gammaquant (Photon) und einem freien bzw. quasifreien ruhenden Elektron. Bei diesem Prozess werden ein Teil des Impulses und der Energie des Gammaquants an das Elektron übertragen, wodurch das Gammaquant zwar gestreut wird und seine Energie verringert, im Gegensatz zum Photoeffekt jedoch nicht absorbiert wird und weitere sekundäre Wechselwirkungen verursachen kann. Das Elektron nimmt die übertragene Energie und den Impuls auf und wird dadurch ebenfalls unter einem gewissen Winkel gestreut. das Elektron kann hierbei als quasifrei angesehen werden, da seine Bindungsenergie typischerweise nur einige eV beträgt, während die Photonenenergien für die die Compton-Streuung messbar ist, erst im keV Bereich beginnen (im Bereich darunter dominiert der Photoeffekt um mehrere Größenordnungen). Zudem ist die Wechselwirkungszeit zwischen Photon und Elektron im Vergleich zur Umlauffrequenz des Elektrons so gering, dass man annehmen kann, dass sich das Elektron in Ruhe befindet. Abbildung 2.6 zeigt eine schematische Darstellung des beim Comptoneffekt ablaufenden Prozesses.

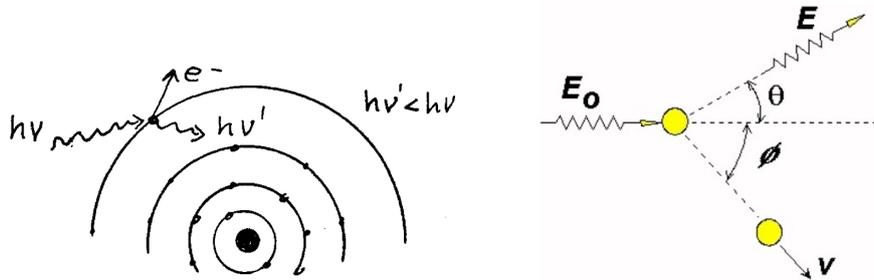


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung des Comptoneffektes [NNK11]

Da es sich um einen elastischen Stoß handelt, folgt aus der relativistischen Viererimpulserhaltung die bekannte Formel für die Wellenlängenvergrößerung:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} \cdot (1 - \cos(\theta)) \quad (2.24)$$

Wobei  $\theta$  den Streuwinkel des Photons,  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $m_e$  die Elektronenmasse angeben.

Für die Energie des gestreuten Photons folgt aus  $E = h \cdot \nu$  direkt:

$$E_\gamma = \frac{E_{\gamma 0}}{1 + \frac{E_{\gamma 0}}{m_e c^2} \cdot (1 - \cos(\theta))} \quad (2.25)$$

Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich beim Compton-Effekt zu [MRR95]:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 \cdot Z \cdot \left(1 - 2 \left(\frac{E_\gamma}{m_e c^2}\right) + \frac{26}{5} \cdot \left(\frac{E_\gamma}{m_e c^2}\right)^2 + \dots\right) & E_\gamma < m_e c^2 \\ \frac{\pi \cdot r_e^2 m_e c^2 Z}{E_\gamma} \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2E_\gamma}{m_e c^2}\right)\right) \approx \frac{Z}{E_\gamma} & E_\gamma \gg m_e c^2 \end{cases} \quad (2.26)$$

mit dem Thomson-Wirkungsquerschnitt  $\sigma_0 = \frac{8}{3} \pi \cdot r_e^2$ , dem klassischen Elektronenradius  $r_e \approx 2,818 \cdot 10^{-15} m$  und der Elektronenmasse  $m_e$ .

Vergleicht man den die Abhängigkeiten dieses Wirkungsquerschnittes mit denen des Photoeffekts, so erkennt man, dass dieser Effekt im Bereich energetisch oberhalb des Photoeffekts sowie bei kleineren Ordnungszahlen als der Photoeffekt dominant wird.

### 2.4.3 Paarbildung

Durchquert ein Gammaquant, dessen Energie mindestens der doppelten Ruheenergie eines Elektrons ( $2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV}$ ) entspricht das Coulombfeld eines Atomkerns, so kann durch die Paarerzeugung ein Elektron-Positron-Paar erzeugt werden ( $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ ). Die über die doppelte Elektronenmasse hinausgehende Energie erhalten die beiden Teilchen als kinetische Energie. Um die Impulserhaltung zu gewährleisten benötigt man für den Umwandlungsprozess zwingend einen Kern als Reaktionspartner. Die Paarbildung findet im Abstand von etwa einer Comptonwellenlänge vor dem Atomkern statt. Der Kern erhält einen Rückstoßimpuls über das Coulombfeld. Die dazu nötige Energie erhöht die Schwellenenergie für die Paarbildung auf

$$E_{PP,\min} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{M_{\text{Kern}}}\right) \quad (2.27)$$

Abbildung 2.7 zeigt eine schematische Darstellung des Paarbildungseffektes. Das durch den Paarbildungseffekt entstandene Positron hat eine relativ geringe Lebensdauer. Nachdem es seine Bewegungsenergie auf das Wechselwirkungsmaterial übertragen hat, vereinigt es sich mit einem Elektron, wobei es in zwei Gammaquanten mit jeweils einer Energie von  $0,511 \text{ MeV}$  zerstrahlt, welche aus Impulserhaltungsgründen in einem Winkel von  $180^\circ$  zueinander ausgesendet werden.

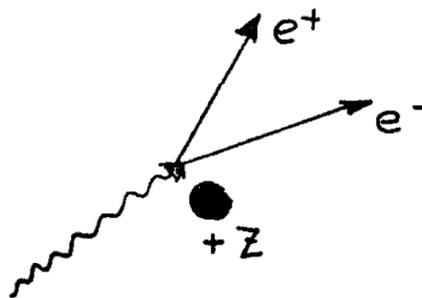


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung des Paarbildungseffektes [NNK11]

Für den Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung gilt [MRR95]:

$$\kappa = \begin{cases} Z^2 \cdot \ln(E_\gamma) & 5m_e c^2 \leq E_\gamma \leq 50m_e c^2 \\ 12\alpha Z^2 r_e^2 & E_\gamma > 10^3 m_e c^2 \end{cases} \quad (2.28)$$

mit der Feinstrukturkonstanten  $\alpha = 1/137$ , dem klassischen Elektronenradius  $r_e \approx 2,818 \cdot 10^{-15} m$  und der Ordnungszahl des Atomkerns  $Z$ .

Da der Wirkungsquerschnitt des Paarbildungseffektes für hohe Energien praktisch Energieunabhängig ist, dominiert er in diesem Bereich alle anderen Wechselwirkungen, die wegen ihrer

umgekehrten Proportionalität zur Gammaenergie hier gegen 0 gehen. Da die Ordnungszahl quadratisch eingeht, wird der Paarbildungseffekt verglichen mit dem Comptoneffekt bevorzugt bei Elementen mit höherer Ordnungszahl auftreten.

#### 2.4.4 Vergleich der 3 Wechselwirkungseffekte

In diesem Abschnitt sollen die bereits erläuterten Abhängigkeiten nochmals kurz zusammengestellt werden. Zusammenfassend kann man die Abhängigkeit der 3 Effekte von der Gammaenergie und der Ordnungszahl des Materials durch das in Abbildung 2.8 gezeigte Diagramm darstellen.

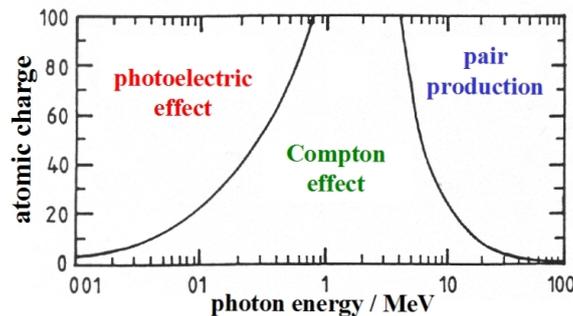


Abbildung 2.8: Abhängigkeit von Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung von der Gammaenergie und der Ordnungszahl des Materials [NNK11]

Wie in den einzelnen Abschnitten bereits erläutert, dominiert der Photoeffekt bei kleinen Gammaenergien und hohen Ordnungszahlen, während der Paarbildungseffekt bei hohen Gammaenergien und hohen Ordnungszahlen dominierend ist. Der Comptoneffekt erreicht seine größte Häufigkeit im Bereich mittlerer Gammaenergien (0,5–5 MeV) und niedriger Ordnungszahlen des Absorbermaterials.

#### 2.4.5 Abschwächung von Photonen in Materie

Gammastrahlung wird in Materie durch die genannten Effekte gemäß des Bouguer-Lambertschen Gesetzes abgeschwächt. Die Abschwächung ist dabei proportional zur Dicke  $d$  des durchstrahlten Stoffes, woraus sich das folgende Exponentialgesetz ergibt:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot d} \quad (2.29)$$

wobei  $\alpha = n \cdot \mu$  als Absorptionskoeffizient bezeichnet wird.  $n$  beschreibt die Atomdichte des Materials und der Wirkungsquerschnitt  $\mu$  ergibt sich aus der Summe der Wirkungsquerschnitte der erläuterten Prozesse zu [MRR95]:

$$\mu = \tau + \sigma + \kappa \quad (2.30)$$

Da es sich um ein Exponentialgesetz handelt, kann man für Gammastrahlung keine absolute Reichweite angeben, sondern lediglich eine materialspezifische Dicke, nach der die Intensität

auf die Hälfte (Halbwertsdicke) oder auf ein Zehntel des ursprünglichen Wertes (Zehntelwertsdicke) abgenommen hat.

Es gilt:

$$d_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\mu} \quad \text{bzw.} \quad d_{1/10} = \frac{\ln(10)}{\mu} \quad (2.31)$$

Für Photonen mit einer Energie von 1 MeV ergeben sich die in Tabelle 2.2 angegebenen Werte <sup>1</sup>:

Material	$d_{1/2}$	$d_{1/10}$
Luft	85 m	> 200 m
organisches Material	9,9 cm	32,7 cm
Blei	0,89 cm	2,97 cm

Tabelle 2.2: Halbwertsdicke und Zehntelwertsdicke für Gammastrahlung in verschiedenen Materialien

Es wird deutlich, dass Gammastrahlung in Luft kaum abgeschwächt wird, sodass dieser Effekt nicht berücksichtigt werden muss.

## 2.5 Gammaskopie

Nachdem nun die grundlegenden Wechselwirkungen von Gammaquanten mit Materie theoretisch behandelt wurden, soll im folgenden Abschnitt auf die physikalischen Grundlagen der verwendeten Detektorklasse eingegangen werden. Im Versuch wurden zwei mit Thallium dotierte Natriumjodid (NaJ:Tl)-Szintillationsdetektoren zum koinzidenten Nachweis der beiden Gammaquanten eingesetzt, weshalb deren Eigenschaften zunächst detailliert dargestellt werden. Am Ende des Abschnitts werden schließlich noch weitere Möglichkeiten zur Gammaskopie kurz vorgestellt.

### 2.5.1 Szintillationsdetektoren

Ein Szintillationsdetektor besteht aus zwei Komponenten. Dem Szintillator, in dem die auftreffende Strahlung in eine von der Energie der Primärquanten abhängige Anzahl an sichtbaren bzw. ultravioletten Photonen umgewandelt wird und einem Photomultiplier, welcher das schwache optische Signal des Szintillators in einen registrierbaren elektrischen Impuls umwandelt. Abbildung 2.9 zeigt eine schematische Darstellung eines solchen Szintillationsdetektors.

Im folgenden sollen die beiden erwähnten Komponenten genauer betrachtet werden.

#### Lumineszenzmechanismus eines anorganischen Szintillationskristalls

Bei dem in diesem Versuch verwendeten Szintillationskristall Natriumjodid handelt es sich um einen anorganischen Szintillator. Dies ist wie in unserem Fall meist ein Einkristall, die

<sup>1</sup>Quelle: [www.zw-jena.de/energie/schultz.html](http://www.zw-jena.de/energie/schultz.html)

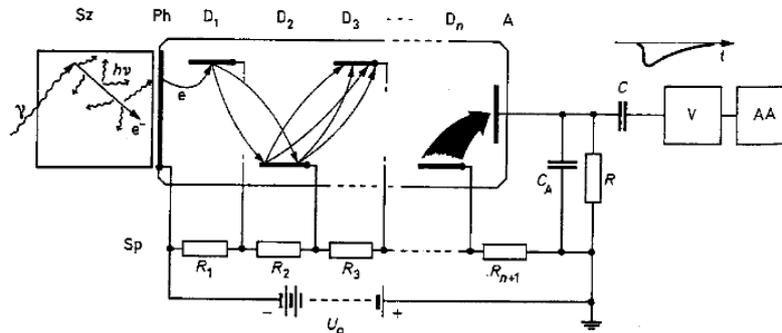


Abbildung 2.9: Schematischer Aufbau eines Szintillationsdetektors. Sz: Szintillator, Ph: Photokathode,  $D_i$ : Dynoden, A: Anode, Sp: Spannungsteiler,  $C_A$ : Anodenkapazität [MRR95]

mit Fremdatomen, sogenannten Farbzentren oder Aktivatorzentren (hier: Thallium) dotiert sind. Der Szintillationsmechanismus dieser Materialien lässt sich durch das Bändermodell der Kristalle erklären. Da es sich bei gängigen anorganischen Szintillatoren meist um Halogenidkristalle handelt, ist das Valenzband voll besetzt, während das Leitungsband gewöhnlich leer ist. Der Energieunterschied zwischen den Bändern beträgt etwa 5–10 eV. Abbildung 2.10 zeigt eine schematische Darstellung des Bändermodells eines anorganischen Szintillationskristalls.

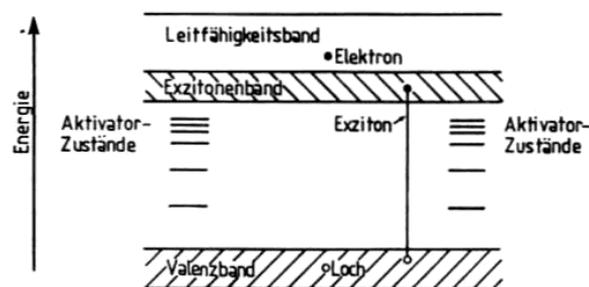


Abbildung 2.10: Bändermodell eines anorganischen Szintillationskristalls [MRR95]

Die Aktivatorzentren (Fremdatome) erzeugen hierbei zwischen Valenz- und Leitungsband zusätzliche lokale Energieniveaus. Betrachtet man nun ein Gammaquant, welches den Szintillationskristall durchquert, so überträgt dieses seine Energie durch Fotoeffekt, Comptoneffekt oder Paarbildung, bzw. einer Kombination dieser, an eines oder mehrere Elektronen des Kristalls. Das Gammaquant kann auf diese Weise seine gesamte Energie oder nur einen Teil seiner Energie an ein Elektron abgeben. Wird die gesamte Energie des Gammaquants in einem Fotoeffekt abgegeben, so ist die kinetische Energie der angeregten Elektronen proportional zur Gammaenergie. Die Bindungsenergie von einigen Elektronenvolt, kann hierbei aufgrund der Gammaenergien im keV bis MeV Bereich vernachlässigt werden. Das durch das primäre Gammaquant angeregte Elektron gibt nun seine sehr hohe Energie durch Anregung (Abgabe von Bremsstrahlung) an weitere Elektronen ab. Die Folge hiervon ist, dass man nun Löcher im Valenzband und freie Elektronen im Leitungsband antrifft, wodurch der Kristall eine gewisse elektrische Leitfähigkeit erhält. Im Idealfall, also wenn keine Energie durch andere Prozesse verloren geht, hat man nun  $n_e$  Elektronen im Leitungsband, deren Energie

jeweils gerade der Bindungsenergie  $E_b$  entspricht. Unter Berücksichtigung der Verluste gilt anstelle des Gleichheitszeichens jedoch immer noch die (in der Regel lineare) Proportionalität. Würden diese Elektronen nun sofort wieder mit einem Loch rekombinieren würde kein Licht frei, da die Energie des Quants gerade der Energie für die Anregung eines Elektrons ins Valenzband entspricht, so dass das Lichtquant sofort wieder absorbiert würde. Dieses Problem löst man durch den Einbau von Fremdatomen in die "verbotene Zone" zwischen Valenz- und Leitungsband. Das Elektron kann nun über die hierdurch erzeugten Zwischenniveaus in das Valenzband zurückkehren, wobei die Energie in Form mehrerer Quanten geringer Energie abgegeben wird. Diese Quanten bezeichnet man als Szintillationslicht. Sie können nach dem verlassen des Kristalls durch den Photomultiplier (PM) registriert werden. Ihre Wellenlänge liegt je nach Aktivatorzentrum im sichtbaren oder ultravioletten Bereich. Entscheidend für die erzielbare Energieauflösung eines Szintillators ist hierbei die Photonenstatistik, also der Anzahl der pro Energieeinheit im Szintillator erzeugten Photonen. Die vom Szintillator erzeugten Photonen treffen schließlich auf die Photokathode des an den Kristall gekoppelten PM und lösen dort Photoelektronen aus, welche vom PM verstärkt und in ein elektrisches Signal umgewandelt werden.

### Funktionsweise des Photomultipliers

Der Photomultiplier ist eines der gebräuchlichsten Instrumente zur Registrierung schneller Lichtsignale und zur Bestimmung des Zeitpunktes eines Teilchendurchganges. Es handelt sich um ein Elektrodensystem, welches sich in einem evakuierten gegen magnetische Streufelder abgeschirmten Glaskolben befindet.

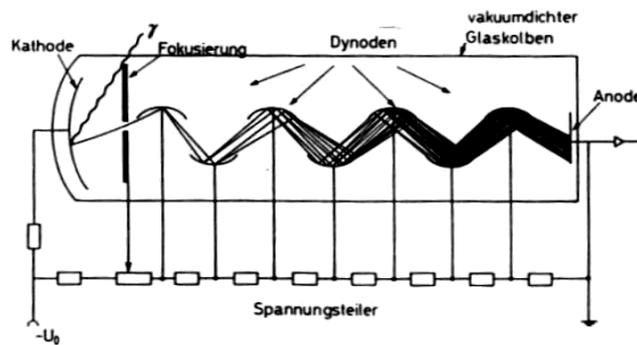


Abbildung 2.11: Schematische Darstellung eines Photomultipliers [MRR95]

Das vom Szintillator erzeugte Szintillationslicht löst am vorderen Ende des Photomultipliers Elektronen aus einer Alkali-Metall-Photokathode heraus. Diese Photokathode liegt auf negativer Hochspannung (in unserem Fall 900–1200 V), so dass die Photoelektronen durch ein elektrisches Feld auf die erste Dynode fokussiert werden können. Die Dynode ist Teil eines Vervielfachungssystems, in dem die an der Kathode anliegende negative Hochspannung über weitere Dynoden bis zur Anode hin durch einen Spannungsteiler auf Erdpotential heruntergeteilt wird, so dass die Elektronen über die Dynoden zur Anode gelenkt werden. Beim Auftreffen auf die erste Dynode löst das Elektron im Mittel 2–3 Sekundärelektronen aus. Diese werden nun zur nächsten Dynode hin beschleunigt und lösen jeweils wieder 2–3 Sekundärelektronen aus. Dieser Prozess wiederholt sich über 10–14 Dynoden bis zur Anode. Dort

angekommen können die Elektronen, die sich mittlerweile um einen Faktor von bis zu  $10^8$  vervielfacht haben, dann über einen Widerstand abfließen und einen messbaren Spannungsimpuls erzeugen, der weiterverarbeitet werden kann. Bei der Verwendung eines Photomultipliers ist zu beachten, dass die Photokathode nur eine Quantenausbeute von 10–25 % besitzt, was zwar die Statistik verschlechtert, die Proportionalität der ursprünglichen Gammaenergie zum letztendlich detektierten Signal jedoch nicht beeinflusst.

Neben dem klassischen Photomultiplier zur Auslese der Lichtsignale können auch Photodioden bzw. Avalanche Photodioden (APDs) eingesetzt werden, welche deutlich kompakter sind und eine Quanteneffizienz von bis zu 70 % besitzen. Eine relativ neue Auslesemethode sind auch Silizium - Photomultiplier (SiPM), welche aus einem Array von im Geiger-Modus betriebenen APDs bestehen und eine sensitivität für einzelne Photonen aufweisen. Da im Versuch ein Photomultiplier zur Auslese verwendet wurde, soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.

## 2.5.2 Weitere Detektionsmöglichkeiten für Gammastrahlung

Neben dem in diesem Versuch verwendeten Szintillationsdetektor zum Nachweis der Gammastrahlung gibt es noch eine Reihe weiterer Möglichkeiten Gammastrahlung nachzuweisen, von denen die Wichtigsten mit ihren speziellen Anwendungsgebieten im Folgenden kurz erläutert werden sollen.

**Halbleiterdetektoren:** Halbleiterdetektoren bestehen aus kristallinen Halbleitermaterialien, meist Silizium oder Germanium. Während Szintillationskristalle bereits in den 1930er Jahren zum Einsatz kamen, begann die Entwicklung dieser Detektorklasse erst in den 1950er Jahren und wurde in den 1960ern zur Serienreife gebracht. Halbleiterdetektoren bestehen meist aus einer in Sperrrichtung betriebenen Diode. Beim Durchgang eines ionisierenden Teilchens oder von ionisierender Strahlung durch die Sperrschicht, entstehen in dieser Elektron-Loch-Paare, die zur entsprechenden Elektrode driften und dort ein elektrisches Signal erzeugen. Durch das Anlegen einer Spannung kann die Sperrschicht noch weiter ausgedehnt werden um das gesamte Kristallvolumen als Detektor nutzbar zu machen. Hierdurch wird auch eine hohe Feldstärke geschaffen um Elektronen und Löcher abzusaugen, bevor diese durch Rekombination verloren gehen. Der große Vorteil von Halbleiterdetektoren gegenüber Szintillationsdetektoren liegt neben der Kompaktheit, vor allem im sehr guten Energieauflösungsvermögen für Teilchen bzw. Gammaquanten bis zu einer Energie von einigen MeV. Der größte Nachteil ist jedoch durch die geringe Effizienz (nur ein Bruchteil der Gammaquanten wechselwirkt mit dem Detektor) und durch die Tatsache dass viele Halbleiterdetektoren gekühlt werden müssen, um thermisches Rauschen zu unterdrücken, gegeben.

**Magnetische Spektrometer:** Magnetische Gammaspektrometer sind vom prinzipiellen Aufbau  $\beta$ -Spektrometer, in denen an Stelle einer  $\beta$ -Quelle eine Konversionsfolie sitzt. Wechselwirkt ein  $\gamma$ -Quant mit der Konversionsfolie, so werden freie Rückstoßelektronen erzeugt, welche im Spektrometer analysiert werden können.

**Kristall-Diffraktions-Spektrometer:** In einem Kristall-Diffraktions-Spektrometer wird die Bragg-Reflexion an einem Kristallgitter ausgenutzt. Abhängig von der Wellenlänge, werden die  $\gamma$ -Quanten im Kristallgitter in bestimmte Winkelbereiche gestreut und mit einem

Zählrohr gemessen. Für niedrige Photonenenergien kann mit einem solchen Detektor die beste Energieauflösung erzielt werden, wobei die Nachweiseffizienz jedoch sehr gering ist.

**Kalorimeter:** In einem Kalorimeter erwärmt ein einfallendes Gammaquant eine gekühlte Substanz. Über die Temperaturerhöhung dieser Substanz kann schließlich bei bekannter Intensität auf die Energie der einfallenden Gammaquanten gefolgert werden. Hierbei können sehr hohe Auflösungen erreicht werden. Ein typisches Einsatzgebiet für solche Detektoren sind z. B. Satelliten zur Detektion von Röntgenstrahlung.

## 2.6 Winkelverteilung von Multipolstrahlung

Zu Beginn dieses Abschnitts soll zunächst ein kurzer Überblick über den radioaktiven Zerfall gegeben und einige begriffe geklärt werden. Sei hierzu  $N$  die Zahl der radioaktiven Kerne des betrachteten Isotops. Die Zerfallskonstante  $\lambda$  gibt dann die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls an und ist damit die Entscheidende Größe zur Definition der Aktivität, welche im Experiment direkt messbar ist.

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (2.32)$$

Durch Intergration ergibt sich hieraus das Zerfallsgesetz:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (2.33)$$

Wobei  $N_0$  die Anzahl der Kerne zu Beginn der Beobachtungszeit ( $t = 0$ ) darstellt. Die Aktivität kann damit folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$A = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (2.34)$$

Die Zeit, nach der die Hälfte der Kerne ( $N_0/2$ ) zerfallen ist, heißt Halbwertszeit und hängt mit der Zerfallskonstanten gemäß

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad (2.35)$$

zusammen. Die Lebensdauer  $\tau$  beschreibt schließlich die Zeit, in der die Aktivität auf den  $1/e$  fachen Wert abgenommen hat und hat den Folgenden Zusammenhang mit der Lebensdauer und der Halbwertszeit:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln(2)} \quad (2.36)$$

Die Zerfallskonstante und damit die Übergangswahrscheinlichkeit folgt für einen Übergang  $i \rightarrow f$  aus Fermis Goldener Regel [Sch98]:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \rho_f |M_{if}|^2 \quad (2.37)$$

mit der Zustandsdichte der Endzustände  $\rho_f$  und dem Übergangsmatrixelement

$$M_{if} = \langle \Psi_f | \widehat{M}_{lm} | \Psi_i \rangle \quad (2.38)$$

mit den Wellenfunktionen von Anfangs- und Endzustand und dem Multipoloperator als Störung.

Die Wellenfunktion  $\Psi$  wurde in Abschnitt 2.2 hergeleitet und kann in einen Radial- ( $R_n$ ) und einen Winkelanteil ( $Y_{l,m}$ ) aufgespalten [Sch98] werden (siehe Gleichung 2.13).

$$\Psi = R_{n,l}(r) \cdot Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (2.39)$$

Setzt man die in Radial- und Winkelanteil aufgespaltene Wellenfunktion in die Goldene Regel ein, so erhält man mit dem Wigner-Eckhart-Theorem die folgende Abhängigkeit [CDL99]:

$$\lambda \propto \frac{2\pi}{\hbar} \rho_f \underbrace{\left| \langle R_{n_f}^f | \widehat{M}_{lm} | R_{n_i}^i \rangle \right|^2}_I \underbrace{|\langle L_f, l; m_f, m | L_i, m_i \rangle|^2}_{II} \quad (2.40)$$

Der erste Ausdruck (I) stellt hierbei das reduzierte Matrixelement dar. Dieses ist unabhängig von den magnetischen Quantenzahlen, hängt jedoch über die Radialfunktion vom vorliegenden Potential ab und bestimmt die Zeitabhängigkeit des Zerfalls. Der zweite Ausdruck (II) beschreibt den Glebsch-Gordon-Koeffizienten und damit die Übergangswahrscheinlichkeit. Er hängt ausschließlich vom Winkelanteil ab und enthält die Drehimpulsquantenzahlen der beteiligten Zustände. Durch diesen Koeffizienten ist somit die Winkelverteilung der emittierten Strahlung bestimmt. Um die Winkelverteilung anzugeben wird eine messbare Größe benötigt, welche sensitiv auf die Winkelabhängigkeit der Gammaquanten ist. Als solche Größe kann die Strahlungsintensität herangezogen werden, welche proportional zum Poynting-Vektor ist. Für diesen gilt:

$$\vec{S} \propto \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.41)$$

Setzt man die in Gleichung 2.14 und 2.15 hergeleiteten Ausdrücke für das Magnetische und Elektrische Feld ein, so gilt für die Intensität:

$$I \propto |\vec{S}| \propto f_l \chi_l^{\vec{m}} \times (\vec{\nabla} \times f_l \chi_l^{\vec{m}}) \quad (2.42)$$

Durch Anwenden von Relation 2.10 folgt direkt:

$$I \propto \vec{\nabla} \left( f_l \chi_l^{\vec{m}} \right)^2 \propto \left| \chi_l^{\vec{m}} \right|^2 \quad (2.43)$$

Wertet man diesen Ausdruck weiter aus, so folgt:

$$I \propto \left| \chi_l^{\vec{m}} \right|^2 \propto \left| \vec{E} Y_l^m \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} Y_l^m \right|^2 \quad (2.44)$$

## 2.6 Winkelverteilung von Multipolstrahlung

---

$L_z$  ist hierbei eine direkte Eigenfunktion der Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m(\cos(\theta))$ , und auch  $L_x$  und  $L_y$  können durch die Auf- und Absteigeoperatoren [Sch98]

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y \quad (2.45)$$

als Kombination von Eigenfunktionen von  $Y_l^m$  ausgedrückt werden. Für den Eigenwert der Auf- und Absteigeoperatoren gilt [Sch98]:

$$L_{\pm}Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}Y_l^{m \pm 1} \quad (2.46)$$

Durch umstellen und einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} I &\propto |\vec{\chi}_l^m|^2 \propto \frac{1}{l(l+1)} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \\ \frac{1}{2i}(L_+ - L_-) \\ L_z \end{pmatrix} Y_l^m \right|^2 \\ &= \frac{1}{l(l+1)} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}Y_{l,m+1} + \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}Y_{l,m-1}) \\ \frac{1}{2i}(\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}Y_{l,m+1} - \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}Y_{l,m-1}) \\ mY_{l,m} \end{pmatrix} \right|^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Führt man nun Gleichung 2.47 explizit aus, so erhält man unter Berücksichtigung der Tatsache, dass alle Produkte mit ungleichen Quantenzahlen auf Grund der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen wegfallen, den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} I \propto |\vec{\chi}_l^m|^2 \propto F_l^m(\theta) &= \frac{1}{2l(l+1)} ([l(l+1) - m(m+1)] |Y_l^{m+1}|^2 \\ &+ [l(l+1) - m(m-1)] |Y_l^{m-1}|^2 + 2m^2 |Y_l^m|^2) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Wertet man diesen Ausdruck aus, so kann man die Verteilungen für alle Multipolordnungen angeben. Im Folgenden sollen die ausgewerteten Ausdrücke für Dipolstrahlung und Quadrupolstrahlung explizit angegeben werden.

Für Dipolstrahlung ( $l=1$ ) hat die Winkelverteilung die folgende Form:

$$F_1^0 = \frac{3}{8\pi} \sin^2(\theta) \quad (2.49)$$

$$F_1^{\pm 1} = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2(\theta)) \quad (2.50)$$

In Polarkoordinaten ergeben sich hiermit die in Abbildung 2.12 dargestellten Verteilungen.

Für Quadrupolstrahlung ( $l=2$ ) ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$F_2^0 = \frac{15}{8\pi} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \quad (2.51)$$

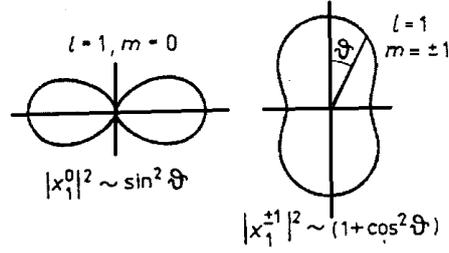


Abbildung 2.12: Winkelverteilung der Gammastrahlung für Dipole [MRR95]

$$F_2^{\pm 1} = \frac{5}{16\pi}(1 - 3\cos^2(\theta) + 4\cos^4(\theta)) \quad (2.52)$$

$$F_2^{\pm 2} = \frac{5}{16\pi}(1 - \cos^4(\theta)) \quad (2.53)$$

In Polarkoordinaten ergeben sich hiermit die in Abbildung 2.13 dargestellten Verteilungen.

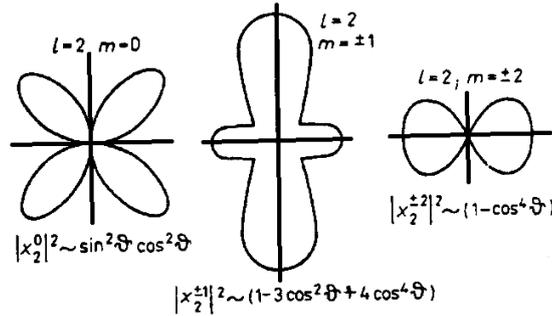


Abbildung 2.13: Winkelverteilung der Gammastrahlung für Quadrupole [MRR95]

Da nur geradzahlige Potenzen von  $\cos(\theta)$  enthalten sind lässt sich die zu beobachtende Achsensymmetrie zu beiden Achsen (Symmetrie zu  $90^\circ$ ) leicht erklären. In Messungen muss also nur ein Winkel Bereich von  $\pi/2$  erfasst werden. Anschaulich kann diese Symmetrie aus der Tatsache, dass die Parität bei der elektromagnetischen Wechselwirkung eine Erhaltungsgröße ist erklärt werden. Eine weitere Besonderheit der gezeigten Verteilungen besteht darin, dass Potenzen von mehr als  $2l$  nicht auftreten.

Die Betrachtung hat weiterhin verdeutlicht, dass aus der Winkelverteilung der Gammaquanten auf die Multipolordnung geschlossen werden kann. Zur Messung der angegebenen Winkelverteilungen muss allerdings eine Achse festgelegt sein, da die Kerne und ihre Spins in der Regel ungeordnet sind und die Abstrahlung der Gammaquanten daher statistisch verteilt erfolgt, so dass keine Vorzugsrichtung ermittelt werden kann. Dieses Problem kann in der Realität zum Beispiel durch die Kühlung der Probe auf sehr tiefe Temperaturen und die Aufprägung einer äußeren Vorzugsrichtung mit einem Magnetfeld erfolgen. Im vorliegenden Versuch wird das Problem dadurch gelöst, dass der Relativwinkel zwischen den beiden Gammaquanten einer  $\gamma - \gamma$ -Kaskade gemessen werden, so dass die Achse zum Beispiel durch das erste Gammaquant definiert wird. Dieser Fall soll im Folgenden genauer betrachtet werden.

## 2.7 $\gamma\gamma$ -Winkelverteilung

Bei der Messung einer  $\gamma - \gamma$ -Kaskade kann die Orientierung des abstrahlenden Kerns durch die Emissionsrichtung des ersten Gammaquants ( $E_{\gamma_1}, \hat{l}, \hat{m}$ ) festgelegt werden. Die Achse vom Emissionspunkt des ersten Gammaquants zum Detektor wird also als z-Achse definiert. Hierdurch wird es möglich, die diskutierten Winkelverteilungen durch das koinzidente Nachweisen der beiden Gammaquants über den Winkel zwischen den beiden Emissionsrichtungen zu bestimmen. Da angenommen werden kann, dass sich der emittierende Kern bei einer sehr kurzen Lebensdauer des Zwischenzustandes der Kaskade nicht umorientieren kann, gibt es für das zweite Gammaquant ( $E_{\gamma_2}, l, m$ ) eine ausgezeichnete Richtung, relativ zu der die Winkelverteilung der Photonen gemessen werden kann.

Um die Theoretische Verteilung genauer zu untersuchen, sollen die folgende Übergänge der  $\gamma - \gamma$ -Kaskade betrachtet werden:

$$|I_2, m_2\rangle \xrightarrow{\gamma_1(\hat{l}, \hat{m})} |I_1, m_1\rangle \xrightarrow{\gamma_2(l, m)} |I_0, m_0\rangle \quad (2.54)$$

Hierbei ergeben sich die zulässigen Werte von  $\hat{l}, \hat{m}$  sowie  $l$  und  $m$  aus den in Abschnitt 2.2 eingeführten Auswahlregeln. Durch die Detektion des ersten Photons ist wie bereits erwähnt die z-Achse festgelegt, so dass nun die Winkelverteilung des zweiten Photons relativ zu dieser z-Richtung gemessen wird. Bei einem solchen Übergang hat jedes Set verschiedener Quantenzahlen eine individuelle Winkelverteilung  $W(\theta)$ , in welche neben der Winkelverteilungsfunktion  $F_l^m$ , der Besetzungswahrscheinlichkeit  $P(m_1)$  der Unterniveaus, auch die jeweilige Übergangswahrscheinlichkeit  $\lambda$  für jeden möglichen Übergang  $m_1 \rightarrow m_0$  eingeht. Für die Übergangswahrscheinlichkeit wurde in Gleichung 2.40 bereits ein Ausdruck gefunden. Berücksichtigt man, dass wie bereits erläutert wurde das reduzierte Matrixelement nicht von den magnetischen Quantenzahlen abhängt und die Übergangswahrscheinlichkeit somit nur durch Betragquadrat der GLEBSCH-GORDON-Koeffizienten vermittelt wird, so folgt für die Winkelverteilung der explizite Ausdruck [MRR95]:

$$W(\theta) = \sum_{m_1, m_0} P(m_1) \cdot |\langle I_0, l; m_0, m | I_1, m_1 \rangle|^2 \cdot F_l^m(\theta) \quad (2.55)$$

Die in dieser Gleichung auftretende Besetzungswahrscheinlichkeit  $P(m_1)$  ist durch den ersten Zerfallsprozess der Kaskade bekannt und kann daher explizit angegeben werden. Aus der definierten Emission des ersten Quants in z-Richtung und der Tatsache, dass alle magnetischen Quantenzahlen  $m_2$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit besetzt sind ( $P(m_2) = 1/(2l + 1) = \text{const.} \Rightarrow (2l + 1)$  gleichwahrscheinliche Werte) folgt für die Besetzungswahrscheinlichkeit [MRR95]:

$$P(m_1) = \sum_{m_2} |\langle I_1, l_1; m_1, \hat{m} | I_2, m_2 \rangle|^2 F_l^{\hat{m}}(\theta = 0) \quad (2.56)$$

Durch einsetzen in Gleichung 2.55 folgt für die Winkelverteilung:

$$W(\theta) = \sum_{m_2, m_1, m_0} |\langle I_1, l_1; m_1, \hat{m} | I_2, m_2 \rangle|^2 F_l^{\hat{m}}(\theta = 0) \cdot |\langle I_0, l; m_0, m | I_1, m_1 \rangle|^2 \cdot F_l^m(\theta) \quad (2.57)$$

Da diese Winkelverteilung über die  $F_l^m$  aus LEGENDRE-Polynomen gerader Ordnung mit konstanten Koeffizienten aufgebaut ist, wird die Winkelverteilungsfunktion für den praktischen Gebrauch oft nach diesen Polynomen entwickelt, worauf jedoch hier im Allgemeinen Fall verzichtet werden soll, da es für diesen Versuch kaum Vorteile bringt.

## 2.8 $\gamma\gamma$ -Winkelverteilung der $4^+ - 2^+ - 0^+$ -Kaskade in $^{60}\text{Ni}$

Im vorliegenden Versuch soll Winkelverteilung der  $4^+ - 2^+ - 0^+$ -Kaskade in  $^{60}\text{Ni}$  gemessen werden. Das Therschema von  $^{60}\text{Ni}$  und die einzelnen Übergänge wurden bereits in Abschnitt 2.3 ausführlich diskutiert. In Abbildung 2.14 ist das bereits gezeigte Niveauschema nochmals dargestellt, um die folgenden Schritte besser zu verdeutlichen.

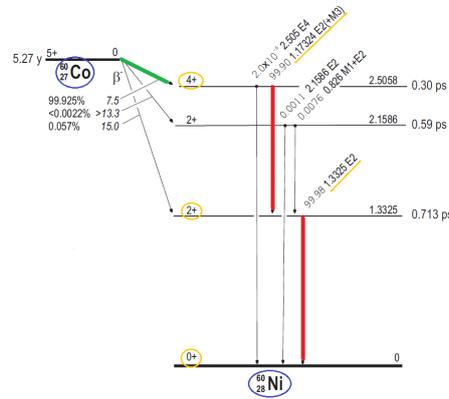


Abbildung 2.14: Niveauschema des  $^{60}\text{Co}$ -Präparats [An11]

Das Niveauschema verdeutlicht, dass die Bedingung, dass das Zwischenniveau eine kurze Lebensdauer aufweisen muss, damit sich der Kern nicht umorientieren kann sicher erfüllt ist, da der Zwischenzustand nur eine Lebensdauer von 0,713 ps besitzt. Bei der Kaskade handelt es sich um einen Übergang von  $I_2 = 4$  über  $I_1 = 2$  nach  $I_0 = 0$  woraus sich die Auswahlregeln für den Drehimpuls ergeben:

$$l = \dot{l} = 2 \quad (2.58)$$

Für die z-Komponente des Drehimpulses gilt mit  $m_0 = 0$ :

$$m = m_i - m_f = m_1 - m_0 = m_1 \quad (2.59)$$

Der in Gleichung 2.57 hergeleitete allgemeine Fall der Winkelverteilung vereinfacht sich damit zu:

$$W(\theta) = \sum_{\substack{|m_2| \leq 4, \\ |m_1| \leq 2}} |\langle 2, 2; m_1, \dot{m} | 4, m_2 \rangle|^2 F_2^{\dot{m}}(\theta = 0) \cdot |\langle 0, 2; 0, m_1 | 2, m_1 \rangle|^2 \cdot F_2^{m_1}(\theta) \quad (2.60)$$

Die Summe in Gleichung 2.60 besteht zunächst aus  $5 \cdot 9 = 45$  Summanden. Um den Ausdruck noch weiter zu vereinfachen betrachten wir zunächst  $F_2^{\dot{m}}(\theta = 0)$ . Betrachtet man nun die

Definitionen der  $F_l^m$  in den Gleichungen 2.51 bis 2.53 so zeigt sich, dass der Ausdruck für  $\theta = 0$  nur für  $\dot{m} = m_2 - m_1 = \pm 1$  einen Wert ungleich 0 liefert. Dies ist physikalisch logisch, da das erste Quant die z-Achse festgelegt hat und deshalb einen nichtverschwindenden Anteil bei  $\theta = 0$  aufweisen muss. Dieser ist dann gemäß Gleichung 2.52:

$$F_2^{\pm 1} = \frac{5}{8\pi} \quad (2.61)$$

Da nur 10 Kombinationen der Quantenzahlen in der Differenz  $\pm 1$  ergeben, wird hierdurch die Zahl der Summanden von 45 auf 10 reduziert. Zusammengefasst können die möglichen Übergänge wie in Abbildung 2.15 dargestellt werden.

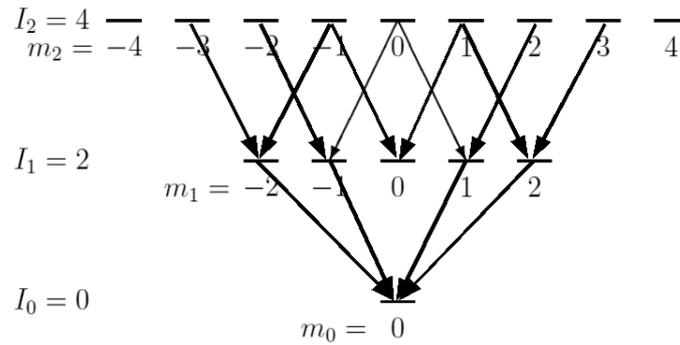


Abbildung 2.15: Übergänge der  $4^+ - 2^+ - 0^+$ -Kaskade in  $^{60}\text{Ni}$  mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit

Die Winkelverteilung vereinfacht sich hiermit weiter zu:

$$W(\theta) = \frac{5}{8\pi} \sum_{\substack{|m_2| \leq 3, \\ m_2 - m_1 = \pm 1}} |\langle 2, 2; m_1, \dot{m} | 4, m_2 \rangle|^2 \cdot |\langle 0, 2; 0, m_1 | 2, m_1 \rangle|^2 \cdot F_2^{m_1}(\theta) \quad (2.62)$$

Als nächsten Schritt werden die CLEBSCH-GORDON-Koeffizienten benötigt. Für diese gilt die geschlossene Formel [An11]:

$$\begin{aligned} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \rangle &= \delta_{m, (m_1 + m_2)} \cdot \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j)!(j + j_1 - j_2)!(j + j_2 - j_1)!(2j + 1)}{(j + j_1 + j_2 + 1)!}} \\ &\times \sum_k \frac{(-1)^k \sqrt{(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!/j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)!(j + m)!(j - m)!}}{k!(j_1 + j_2 - j - k)!(j_1 - m_1 - k)!(j_2 + m_2 - k)!(j - j_2 + m_1 + k)!(j - j_1 - m_2 + k)!} \end{aligned} \quad (2.63)$$

mit

$$\delta_{m, (m_1 + m_2)} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & m = m_1 + m_2 \\ 0, & m \neq m_1 + m_2 \end{array} \right\} \quad (2.64)$$

Weiterhin gelten die folgende Symmetriebeziehungen:

$$\begin{aligned}
 \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \rangle &= (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_1, j_2, -m_1, -m_2 | j, -m \rangle \\
 &= \langle j_2, j_1, -m_2, -m_1 | j, -m \rangle \\
 &= (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_2, j_1, m_1, m_2 | j, m \rangle
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Die GLEBSCH-GORDON-Koeffizienten können demnach mit den angegebenen Formeln explizit berechnet oder aus den Tabellen in [PDG10] bzw. direkt online unter [PDG02] entnommen werden und sind in Tabelle 2.3 aufgelistet.

$m_2$	$m_1$	$ \langle 2, 2; m_1, m_2   4, m_2 \rangle $	$ \langle 0, 2; 0, m_1   2, m_1 \rangle $	$F_2^{m_1}$
-3	-2	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$F_2^{-2} = \frac{5}{16\pi}(1 - \cos^4(\theta))$
-2	-1	$\sqrt{\frac{4}{7}}$	1	$F_2^{-1} = \frac{5}{16\pi}(1 - 3\cos^2(\theta) + 4\cos^4(\theta))$
-1	-2	$\sqrt{\frac{1}{14}}$	1	$F_2^{-2} = \frac{5}{16\pi}(1 - \cos^4(\theta))$
-1	0	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	1	$F_2^0 = \frac{15}{8\pi}\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$
0	-1	$\sqrt{\frac{8}{35}}$	1	$F_2^{-1} = \frac{5}{16\pi}(1 - 3\cos^2(\theta) + 4\cos^4(\theta))$
0	1	$\sqrt{\frac{8}{35}}$	1	$F_2^{+1} = \frac{5}{16\pi}(1 - 3\cos^2(\theta) + 4\cos^4(\theta))$
1	0	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	1	$F_2^0 = \frac{15}{8\pi}\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$
1	2	$\sqrt{\frac{1}{14}}$	1	$F_2^{+2} = \frac{5}{16\pi}(1 - \cos^4(\theta))$
2	1	$\sqrt{\frac{4}{7}}$	1	$F_2^{+1} = \frac{5}{16\pi}(1 - 3\cos^2(\theta) + 4\cos^4(\theta))$
3	2	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$F_2^{+2} = \frac{5}{16\pi}(1 - \cos^4(\theta))$

Tabelle 2.3: Clebsch-Gordon-Koeffizienten und Winkelverteilungsfunktionen für die relevanten Fälle [PDG10]

Durch einsetzen der CLEBSCH-GORDON-Koeffizienten und der Winkelverteilungsfunktionen in Gleichung 2.62 ergibt sich ein analytischer Ausdruck für die theoretische Winkelverteilung:

$$W(\theta) = 0,05429 + 0,0067849 \cdot \cos^2(\theta) + 0,0022616 \cdot \cos^4(\theta) \tag{2.66}$$

Im nächsten Schritt ist es wie bereits in der allgemeinen Betrachtung angesprochen üblich, die Winkelverteilung durch LEGENDRE-Polynome darzustellen. Da die Winkelverteilung nur geradzahlige Potenzen von  $\cos(\theta)$  enthält, betrachten wir die Polynome gerader Potenzen mit der niedrigsten Ordnung:

$$P_2(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(3 \cdot \cos^2(\theta) - 1) \tag{2.67}$$

$$P_4(\cos(\theta)) = \frac{3}{8} - \frac{15}{4}\cos^2(\theta) + \frac{35}{8}\cos^4(\theta) \tag{2.68}$$

Mittels dieser Polynome kann die Winkelverteilung in der folgenden Form dargestellt werden:

$$W(\theta) = 5,699 \cdot 10^{-2} \cdot \left\{ 1 + \underbrace{0,102041}_{A_2^{theo}} \cdot P_2(\cos(\theta)) + \underbrace{9,07 \cdot 10^{-3}}_{A_4^{theo}} \cdot P_4(\cos(\theta)) \right\} \quad (2.69)$$

Die so erhaltene Winkelverteilung muss nun noch an die experimentellen Gegebenheiten angepasst werden. Zum einen treten bei einem koinzidenten Nachweis zweier Gammaquanten immer auch zufällige Koinzidenzen auf, welche durch eine entsprechende Normierung herauskorrigiert werden müssen. Weiterhin müssen die endlichen Raumwinkel der beiden Detektoren und die Ansprechwahrscheinlichkeit der beiden Detektoren auf die verschiedenen Energien der beiden Gammaquanten berücksichtigt werden. Durch die Korrekturen ergibt sich die normierte Zählrate  $K(\theta)$  mit einer konstanten Faktor  $\varsigma$ , welche proportional zur Winkelverteilung ist.

$$K(\theta) = \varsigma \cdot \{1 + A_2^{exp} \cdot P_2(\cos(\theta)) + A_4^{exp} \cdot P_4(\cos(\theta))\} \quad (2.70)$$

Die experimentell zu bestimmenden Konstanten  $A_2^{exp}$  und  $A_4^{exp}$  haben hierbei den folgenden Zusammenhang zu den theoretisch ermittelten Werten:

$$A_2^{exp} = Q_2(\gamma_1) \cdot Q_2(\gamma_2) \cdot A_2^{theo} \quad (2.71)$$

$$A_4^{exp} = Q_4(\gamma_1) \cdot Q_4(\gamma_2) \cdot A_4^{theo} \quad (2.72)$$

wobei die Größen  $Q_k(\gamma_j)$  den endlichen Raumwinkel der Detektoren und die Energieselektion berücksichtigen. Diese Koeffizienten sind zum Beispiel in [ABG65] tabelliert. Die Größe der NaJ(Tl)-Szintillationsdetektoren ist in der Anleitung als  $13/4'' \times 2''$  und  $2'' \times 2''$  angegeben. Da die Anleitung keine genaue Zuordnung der beiden Detektoren zu den im Aufbau verwendeten Detektoren enthält, und da für die Abmessungen des ersten Detektors in [ABG65] keine tabellierten Werte zu finden sind, wird für beide Detektoren die Abmessung  $2'' \times 2''$  verwendet. Der Abstand zwischen Quelle und Detektor beträgt im Experiment 5 cm. Die detektierten Gammaquanten haben eine Energie von  $E_{\gamma_1} = 1,17\text{MeV}$  und  $E_{\gamma_2} = 1,33\text{MeV}$ . Für diese Angaben können den Tabellen in [ABG65] die in Tabelle 2.4 gelisteten Werte entnommen werden.

	1,0 MeV	1,5 MeV
$Q_2$	0,9046	0,9057
$Q_4$	0,7086	0,7114

Tabelle 2.4: Korrekturkoeffizienten für die Berechnung der experimentellen Zählrate [ABG65]

Da die Koeffizienten nur für 1,0 MeV und 1,5 MeV tabelliert sind wurde als Näherung für die gesuchten Energien eine lineare Approximation verwendet. Hiermit ergeben sich für die beiden Gammaquanten die in Tabelle 2.5 angegebenen Korrekturfaktoren.

Hieraus folgen die Werte:

$$Q_2(\gamma_1) \cdot Q_2(\gamma_2) = 0,8192 \quad (2.73)$$

	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$Q_2$	0,9049	0,9053
$Q_4$	0,7096	0,7105

Tabelle 2.5: Approximierte Korrekturkoeffizienten für die Berechnung der experimentellen Zählrate [ABG65]

$$Q_4(\gamma_1) \cdot Q_4(\gamma_2) = 0,5042 \quad (2.74)$$

Hiermit folgt für die Koeffizienten der experimentellen Winkelverteilung:

$$A_2^{exp} = Q_2(\gamma_1) \cdot Q_2(\gamma_2) \cdot A_2^{theo} = 0,08359 \quad (2.75)$$

$$A_4^{exp} = Q_4(\gamma_1) \cdot Q_4(\gamma_2) \cdot A_4^{theo} = 0,004573 \quad (2.76)$$

Für die Winkelverteilung folgt damit:

$$K(\theta) = \varsigma \cdot \left\{ 1 + 0,08359 \cdot P_2(\cos(\theta)) + 4,573 \cdot 10^{-3} \cdot P_4(\cos(\theta)) \right\} \quad (2.77)$$

mit einer an die Zählrate anzupassenden Konstanten  $\varsigma$ .



## Kapitel 3

# Experimenteller Aufbau

In diesem Kapitel soll die Anordnung der im Versuch verwendeten Detektoren und insbesondere deren Ausleselektronik genauer betrachtet werden.

### 3.1 Anordnung der Detektoren und der radioaktiven Quelle

Abbildung 3.1 zeigt ein Foto der Anordnung der beiden Detektoren.

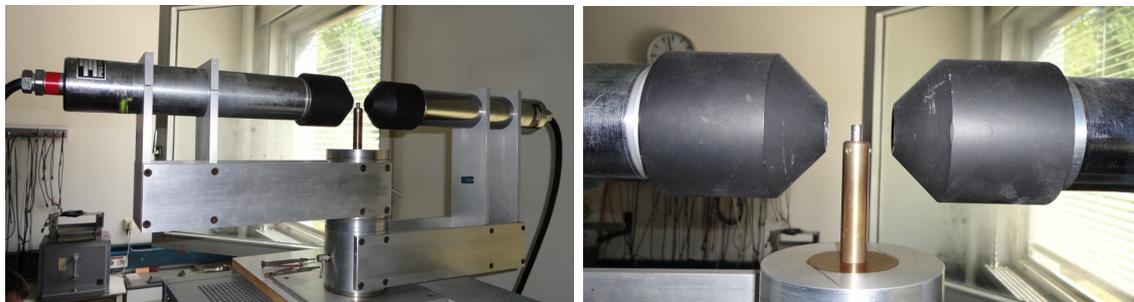


Abbildung 3.1: Foto des realen Experimentaufbaus. Links: Kompletter Aufbau mit drehbaren Detektoren, Rechts: Detailansicht der Quellenhalterung und der Kollimatoren.

Die beiden Szintillationsdetektoren zum Nachweis der Gammaquanten sind auf drehbaren Halterungen montiert und können unter einem auf der Skala an der Halterung abzulesenden Relativwinkel zueinander positioniert werden (linkes Bild). In der Praxis wurde der erste Detektor am Nullpunkt der Skala fixiert und der zweite relativ zu diesem um die Quelle gedreht. Das rechte Bild verdeutlicht die Anordnung der Quelle relativ zu den Detektoren, welche jeweils mit einem massiven Bleikollimator abgeschirmt sind, so dass die Quanten nur unter einem genau vorgegebenen Winkelbereich detektiert werden und den Detektor nicht etwa von der Seite treffen können. Die Quelle ist auf einer ortsfesten Halterung in der Mitte des Rotationskreises fixiert. Der erste Detektor (Blauer Zweig) wird mit einer Hochspannung von + 640 V betrieben, während der zweite Detektor (roter Zweig) eine Hochspannung von + 810 V erhält.

### 3.2 Blockschalbild und Einstellung der beiden NaJ:Tl - Detektoren

Abbildung 3.2 zeigt ein Blockschalbild der verwendeten Ausleseelektronik.

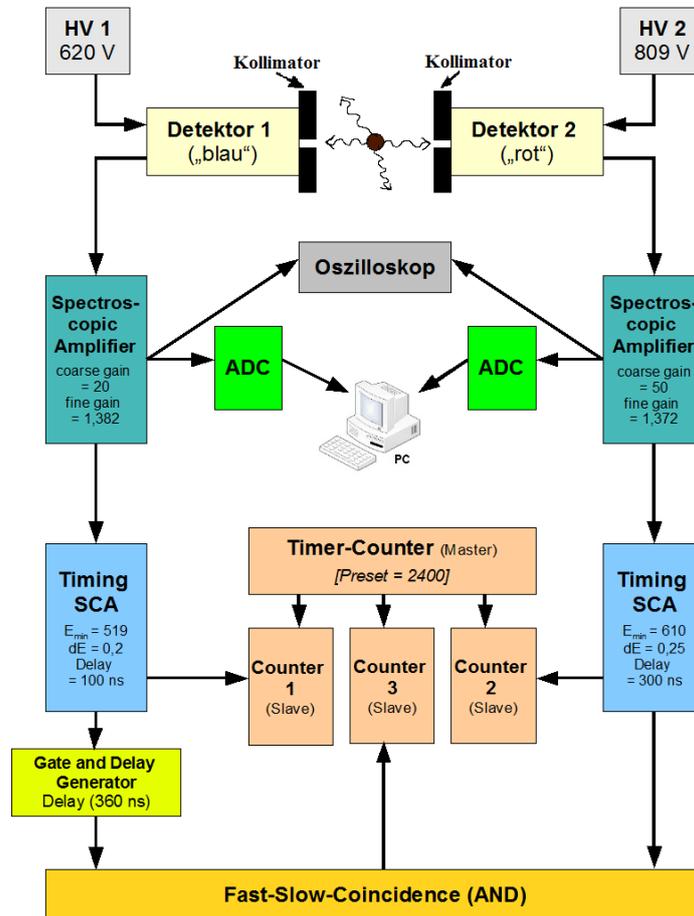


Abbildung 3.2: Blockschalbild der verwendeten Ausleseelektronik. (HV: = Hochspannungsversorgung, ADC := Analog zu Digital Wandler, SCA := Single Channel Analyser)

#### 3.2.1 Module der Ausleseelektronik

Im folgenden sollen zunächst die einzelnen Module genauer erläutert werden, bevor dann auf die zusammenhängende Auslekette eingegangen wird.

**Spectroscopic Amplifier (Verstärker):** Der Verstärker verstärkt das eingehende Analogsignal um einen einstellbaren Faktor.

**Analog zu Digitalwandler (ADC):** Der ADC wandelt die Höhe bzw. die Fläche des eingehenden Analogsignals in einen zum Eingangssignal proportionalen digitalen Wert um.

Der im versuch verwendete ADC hat einen Messbereich von 2048 Kanälen. Die vom ADC generierte Digitale Information kann schließlich über eine geeignete Schnittstelle zur Weiterverarbeitung an den PC übertragen werden.

**Timing SCA (Einkanalanalysator):** Der Einkanalanalysator prüft, ob die Höhe des Eingangssignals innerhalb eines bestimmten einstellbaren Bereichs liegt. Im vorliegenden Fall kann sowohl eine untere Schwelle als auch eine Breite des Fensters in welchem die Signale akzeptiert werden, vorgegeben werden. Liegt ein Signal im entsprechendnen Fenster, so gibt der SCA ein wohl definiertes logisches Signal (NIM-Signal [-0,6 V]) aus. Weiterhin liefert der SCA wenn ein Eingangssignal akzeptiert wurde auf einem weiteren Ausgang ein logisches TTL-Signal (+5 V, mind. 200 ns Länge), welches als Eingangssignal für einen Zähler benötigt wird. Der SCA ermöglicht es also gewisse Energiebereiche aus dem Spektrum auszuwählen, was für die geplante Koinzidenzmessung der verschiedenenenergetischen Gammaquanten unerlässlich ist .

**Timer / Counter:** Der Zähler, zählt, wie viele TTL Signale an seinem Eingang eintreffen.

**Gate and Delay Generator:** Das logische Delay-Modul ermöglicht es ein logisches Signal (hier NIM) auf elektronischem Weg um eine gewisse Zeit zu verzögern. Am Ausgang wird wieder ein NIM-Signal zur Verfügung gestellt. Im Gegensatz hierzu gibt es auch Delay-Module, welche auf langen, aufgewickelten Kabeln beruhen und ei Kabellaufzeit als Verzögerung liefern. Diese sind die einzige Möglichkeit ein analoges Signal zu verzögern, eignen sich jedoch nur bedingt für digitale Signale und kommen hier nicht zum Einsatz.

**Fast-Slow Coincidence:** Das Koinzidenzmodul ist auf ein logisches AND eingestellt und liefert somit nur ein Ausgangssignal wenn an beiden Eingängen im Rahmen der Koinzidenzauflösungszeit (hier  $\approx 40$  ns) „gleichzeitig“ ein Signal anliegt. Als Ausgangssignal wird auch hier ein TTL-Signal für den Zähler produziert.

#### 3.2.2 Aufbau der Auslekette

Nachdem nun die einzelnen Komponenten der Schaltung erläutert wurde, soll nun die zusammenhängende Auslekette betrachtet werden. Die Szintillatoren erzeugten analogen Signale werden zunächst durch den Verstärker (Spectroscopic Amplifier) um einen Faktor 20 bzw. 50 verstärkt um für beide Detektoren etwa gleich große Signale zu erhalten. Um die Verstärkung und die Fenster des Einkanalanalysators (SCA) einstellen zu können, werden die Signale mittels eines Analog zu Digitalwandlers (ADC) digitalisiert und auf dem PC als Histogramm dargestellt. Weiterhin können die Signalformen auf einem Oszilloskop beobachtet werden. Die verstärkten Signale werden nun an den Einkanalanalysator (SCA) übergeben, wobei das Fenster für den ersten Detektor (blau) auf den 1,17 MeV Photopeak im Spektrum des ADC und das Fenster für den zweiten Detektor auf den 1,33 MeV Photopeak eingestellt ist. Die durch den SCA produzierten TTL-Siganle werden nun zum einen jeweils an einen Zähler übergeben um die Einzelzählrate zu bestimmen. Nachdem das Signal des ersten Detektors durch den Gate- and Delay Generator zeitlich auf das Signal des zweiten Detektors abgestimmt

### 3.2 Blockschalbild und Einstellung der beiden NaJ:TI - Detektoren

---

wurde (Ausgleichen von Laufzeitdifferenzen) werden beide Signale an eine als AND Baustein betriebene Fast-Slow-Koinzidenz übergeben. Haben nun beide Detektoren im Rahmen der Koinzidenzauflösungszeit „gleichzeitig“ angesprochen, so wurden zwei Gammaquanten Koinzident nachgewiesen und der dritte Zähler erhält einen Impuls. Über ein Timer-Counter Modul im Timer Modus kann weiterhin die Messzeit der 3 Zähler voreingestellt werden.

Abbildung 3.3 zeigt ein Foto der in diesem Versuch eingesetzten verkabelten Ausleseelektronik.

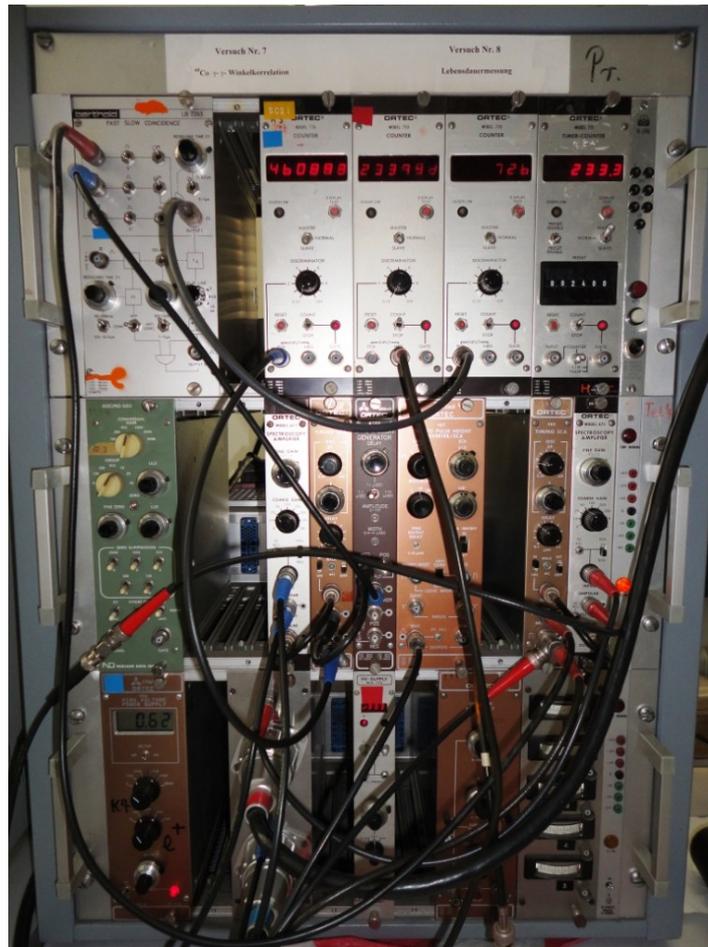


Abbildung 3.3: Foto der verkabelten Ausleseelektronik.

In der oberen Reihe sind neben dem Koinzidenzmodul (links) auch die 3 Zähler sowie der Timer-Counter (rechts) zu erkennen. In der mittleren Reihe befinden sich die beiden Verstärker, die Einkanalanalysatoren, der ADC und das Delay Modul.

# Kapitel 4

## Messungen und Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen die verschiedenen durchgeführten Messungen erläutert, deren Ergebnisse dargestellt und ausgewertet werden.

### 4.1 Einstellung der Signalverstärkung anhand des Spektrums von $^{60}\text{Co}$

Zunächst wurden die vom unipolaren Ausgang des Verstärkers von einem  $^{60}\text{Co}$ -Präparat hervorgerufenen Impulse mit dem Oszilloskop betrachtet. Abbildung 4.1 zeigt den zu beobachtenden Signalverlauf für mehrere auf dem oszilloskopschirm überlagerte Impulse.

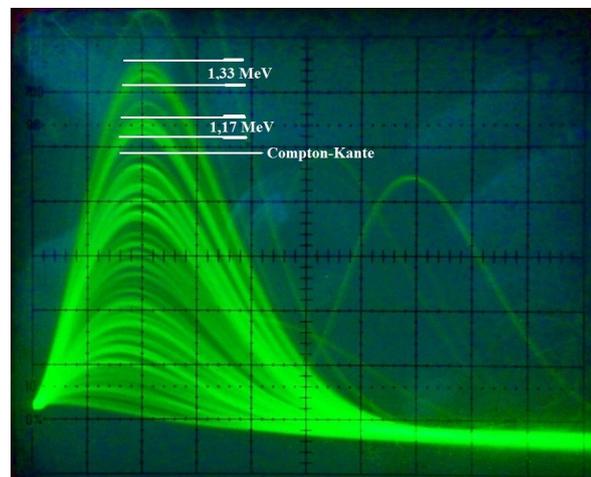


Abbildung 4.1: Auf dem Oszilloskop zu beobachtender Signalverlauf nach dem Verstärker.

Die Überlagerung der Signale auf dem Oszilloskopschirm zeigt deutlich die erwartete Struktur des Spektrums. Die intensiven Bereiche der höchsten Signale stellen hierbei Ereignisse dar, bei denen die Gammaquanten ihre gesamte Energie in einem Photoeffekt deponiert haben und repräsentieren daher die im Spektrum zu beobachtenden Photopeaks bei 1173 und 1333 keV. Unterhalb dieser beiden intensiven Bereiche folgt nach einem kurzen Bereich ohne Signale die Compton-Kante, unterhalb derer wieder Impulse zu beobachten sind.

## 4.2 Einstellung des Discriminators anhand des Spektrums von $^{60}\text{Co}$

Im nächsten Schritt wurden die Signale des unipolaren Ausgangs des Verstärkers mit dem ADC digitalisiert. Der dynamische Bereich („conversion range“) des ADC wurde hierbei auf 1024 Kanäle eingestellt und durch die Einstellung des „conversion gain“ auf den selben Wert vollständig ausgenutzt. Mittels der zu beobachtenden Spektren wurde der Verstärker so eingestellt, dass die beiden Gammalinien des  $^{60}\text{Co}$ -Präparats etwa bei den Kanälen 750 bzw. 850 liegen. Abbildung 4.2 zeigt die beiden nach der Einstellung des Verstärkers aufgenommenen Gammaspektren.

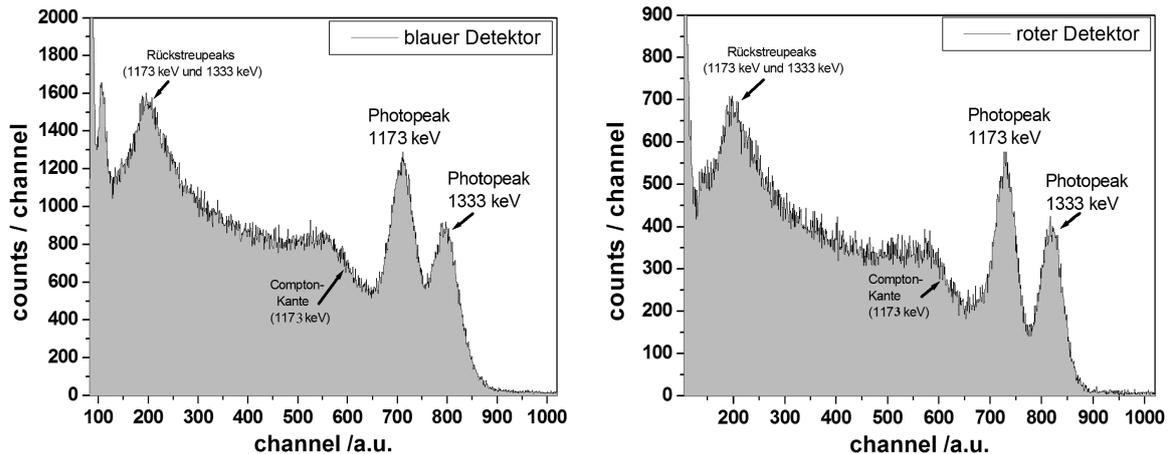


Abbildung 4.2: Gammaspektren des  $^{60}\text{Co}$ -Präparats aufgenommen mit dem blauen Detektor (links) und dem roten Detektor (rechts)

In den Spektren sind die typischen bereits Anhand der Signalformen auf dem Oszilloskop-Schirm erläuterten Strukturen zu erkennen. Für diesen Versuch relevant sind allein die beiden Photopeaks, da nur die Quanten, welche ihre gesamte Energie im Detektor deponieren eindeutig identifiziert werden können. Der im niederenergetischen Bereich zu beobachtende Compton-Untergrund stellt eine Überlagerung der Comptonereignisse von Gammaquanten beider Primärenergien dar, so dass diese Ereignisse für die Koinzidenzmessung nicht verwendbar sind. Die Tatsache, dass die Compton-Kante der 1,33 MeV Quanten teilweise mit dem Photopeak der 1,17 MeV Quanten überlagert ist und daher im Spektrum nicht explizit identifiziert werden kann, soll im Folgenden auf Grund der geringen Intensität der Compton-Ereignisse in diesem Bereich ignoriert werden.

## 4.2 Einstellung des Discriminators anhand des Spektrums von $^{60}\text{Co}$

Im nächsten Schritt werden die Fenster der beiden Timing-SCAs mittels der Spektren von  $^{60}\text{Co}$  eingestellt. Hierzu wird der positive Output des SCA mit dem Gate-Eingang des ADC verbunden und der ADC auf COIN eingestellt, so dass der ADC nur noch Eingangssignale digitalisiert, welche koinzident mit dem Ausgangssignal des zugehörigen SCA sind. Das Fenster des „roten Zweiges“ wurde auf diese Weise auf die 1,33 MeV Linie und das Fenster der „blauen“ Zweiges auf die 1,17 MeV Linie des  $^{60}\text{Co}$  - Spektrums eingestellt. Abbildung 4.3

zeigt die so erhaltenen Spektren im Vergleich zu dem zuvor aufgenommenen gesamten  $^{60}\text{Co}$  - Spektrum.

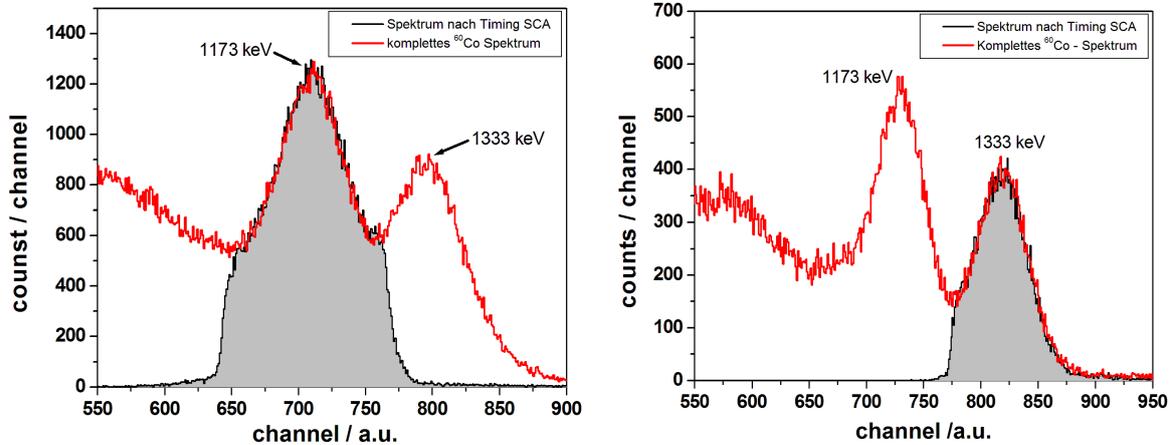


Abbildung 4.3: Spektren des  $^{60}\text{Co}$  - Präparats nach dem SCA (grau) im Vergleich zum Gesamten  $^{60}\text{Co}$  - Spektrum (rote Linie) für den blauen Detektor (links) und den roten Detektor (rechts)

Die Abbildung verdeutlicht, dass der SCA nur ein Ausgangssignal liefert, wenn das Eingangssignal innerhalb des eingestellten Fensters liegt. Eine mögliche Fehlerquelle, welche in den gezeigten Spektren auffällt ist die teilweise Überlagerung der beiden Photopeaks und der beiden eingestellten Fenster. Sollten demnach ein 1,33 MeV Gammaquant im „blauen“ Detektor ein Signal im niederenergetischen Bereich des zugehörigen Photopeaks auslösen und somit akzeptiert werden, so muss dass 1,17 MeV Gammaquant im „roten“ Detektor ein Signal im höherenergetischen Bereich des entsprechenden Photopeaks auslösen, damit es zu einer Koinzidenz kommt. Da in diesem Fall die beiden Detektoren lediglich vertauscht sind, sollte sich in diesem Fall auf Grund des kleinen Überlagerungsbereichs ohnehin seltenen Fall, kein Fehler ergeben. Wird im beschriebenen Fall eines der beiden Gammaquanten nicht nachgewiesen, so liefert zwar der eine Detektor, welcher ein Gammaquant in seinem Fenster detektiert hat ein Signal, es kommt jedoch zu keiner Koinzidenz. Es kommt also in diesem Fall zu einer systematischen Verringerung der normierten Koinzidenzzählrate. Zu einem ähnlichen Fehler kommt es, wenn eines der koinzidenten Gammaquanten ein Comptonereignis auslöst und daher vom jeweiligen Detektor nicht akzeptiert wird.

### 4.3 Optimierung der Zeitverzögerung

Im Folgenden soll das Delay so eingestellt werden, dass die maximale Zahl an Koinzidenzen gemessen wird. Dies ist für diesen Versuch wichtig, da nur eine begrenzte Messzeit zur Verfügung steht und die Zahl der Koinzidenzen die Qualität der Ergebnisse entscheidend beeinflusst. Die optimale Delayzeit wurde durch Variieren der Delayzeit am Gate- und Delaygenerator ermittelt. Hierzu wurde die Delayzeit systematisch erhöht und jeweils die Zahl der Koinzidenzen während einer Messzeit von 1 Minute bestimmt. Die erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 4.1 angegeben. Die Optimale Delay-Zeit ergibt sich aus Tabelle 4.1 zu 360 ns. Dieses Delay wurde daher für den gesamten versuch verwendet.

Delay [ns]	Koinzidenzen pro Minute	Fehler
340	131	11
350	217	15
355	208	14
360	241	16
365	221	15
370	206	14
380	99	10

Tabelle 4.1: Messung der Koinzidenzen pro Minute für verschiedene Delay-Einstellungen

## 4.4 Messung der $^{60}\text{Ni}$ - $\gamma$ - $\gamma$ -Winkelverteilung

Nachdem nun alle Einstellungen der Elektronik vorgenommen und optimiert wurden, soll nun die  $^{60}\text{Ni}$ - $\gamma$  -  $\gamma$ -Winkelverteilung gemessen werden. Hierzu wurden bei einer Messzeit von 4 Minuten sowohl die Einzelzählraten der beiden Detektoren als auch die Koinzidenzzählrate für die Relativwinkel  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ$  (2 Messungen),  $210^\circ$ ,  $240^\circ$  und  $270^\circ$  bestimmt. Hiermit wurde auf Grund der im Theorieteil erläuterten Symmetrie der Winkelverteilung zu  $90^\circ$  das zur Bestimmung der Winkelverteilung benötigte Intervall von  $90^\circ$  sogar 2-mal abgedeckt. Für die Winkel  $> 180^\circ$  wurden daher jeweils die entsprechenden Winkel zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  angenommen. So liefert zum Beispiel die Messung  $210^\circ$  den selben Wert wie eine Messung bei einem Relativwinkel von  $150^\circ$ . Da die gesamte Messreihe 3 mal durchgeführt wurde, existieren also für jeden Relativwinkel 6 Messwerte. Tabelle 4.2 stellt die erzielten Ergebnisse dar.

### 4.4.1 Zufällige Koinzidenzen

Um die gemessenen Werte korrigieren zu können, soll im nächsten Schritt die Zahl der zufälligen Koinzidenzen bestimmt werden. Hierzu wurde das Delay des „blauen“ Gate&Delay-Genartors auf  $11 \mu\text{s}$  gestellt um sicher nur Zufällige Koinzidenzen zu erhalten. Bei einer Messung über 4224 Minuten als 70,4 Stunden ergaben sich 10901 zufällige Koinzidenzen. Die Zahl der Zufälligen Koinzidenzen in einer Messzeit von 240 s ergibt sich also zu:

$$C^{(acc)} = \frac{10901}{4224min} \cdot 4min = 10,32 \pm 0,10 \quad (4.1)$$

Der Fehler wurde hierbei als zu erwartende Standardabweichung über die Wurzel des Messwertes abgeschätzt. Es zeigt sich, dass die Statistik der Messung gut genug ist, da der Fehler im Bereich von etwa 1% des Messwertes liegt.

Um die Ergebnisse zuverlässig korrigieren zu können, sollte die Zahl der Zufälligen Koinzidenzen maximal 10 % der echten Koinzidenzen betragen. Im vorliegenden Versuch liegt der Wert bei weniger als 2 %, so dass diese Bedingung in jedem Fall erfüllt ist.

Theoretisch ergibt sich die Anzahl der Zufälligen Koinzidenzen bei einer Zeitaufösung der schnellen Koinzidenzstufe von  $2\tau$  zu [An11]:

$$C_{theo}^{(acc)} = N^{rot} \cdot N^{blau} \cdot 2\tau \quad (4.2)$$

eingest. Winkel [°]	$\cong$ Winkel [°]	Zählerstand „blau“	Zählerstand „rot“	Koinzidenzen
90	90	477633	222373	766
120	120	475521	220803	825
150	150	475177	221475	886
180	180	473816	223004	919
210	150	474549	227382	794
240	120	475041	234481	839
270	90	474025	240482	753
180	180	472405	223251	840
90	90	472152	224123	714
120	120	470907	221088	767
150	150	472036	221552	837
180	180	472435	222644	820
210	150	470984	227938	850
240	120	471697	232364	747
270	90	470375	235631	783
180	180	470598	220873	842
90	90	470281	220926	750
120	120	470089	218412	741
150	150	469845	219098	885
180	180	469474	219761	872
210	150	469550	224095	819
240	120	468701	228114	771
270	90	467625	235028	757
180	180	468834	219483	821

Tabelle 4.2: Messergebnisse der Messung zur  $\gamma$  -  $\gamma$ -Winkelverteilung. Die Messzeit betrug je 240 s.

Die Zeitaufösung ist in der Anleitung [An11] mit  $2\tau = 40ns$  angegeben. Setzt man typische aus der Mittelung der gemessenen Werte erhaltenen Werte von  $N^{blau} = 4718231/240s$  und  $N^{rot} = 2251751/240s$  in die Formel ein, so ergibt sich ein Wert von etwa 17,7 Zufälligen Koinzidenzen während einer Messzeit von 240 s, was zwar um einen Faktor  $\approx 1,7$  größer als der gemessene Wert ist, jedoch unter Berücksichtigung der Tatsache, dass es sich um eine grobe Abschätzung handelt, größenordnungsmäßig gut mit den ermittelten 10,3 zufälligen Koinzidenzen übereinstimmt. Für die folgenden Berechnungen wird der experimentelle Wert herangezogen.

Für das Verhältnis von echten zu zufälligen Koinzidenzen gilt:

$$\frac{C^{(meas)}(\theta) - C^{(acc)}}{C^{(acc)}} \propto \frac{W(\theta)}{2\tau \cdot Z} \quad (4.3)$$

wobei  $Z$  die Zerfallsrate des radioaktiven Präparats darstellt. Das Verhältnis von echten zu Zufälligen Koinzidenzen kann also durch eine Variation der Präparatestärke und der Zeitaufösung beeinflusst werden. Je kleiner die beiden Werte sind, desto weniger zufällige Koinzidenzen werden detektiert.

### 4.4.2 Bestimmung der normierten Zählrate

Die normierte Zählrate kann für die 4 verschiedenen Winkel mittels der folgenden Formel berechnet werden:

$$K(\theta) = \sum_{i=1}^6 \frac{C_i^{(meas)}(\theta) - C^{(acc)}}{N_i^{(rot)}(\theta) \dot{N}_i^{(blau)}(\theta)} \quad (4.4)$$

wobei  $C^{(meas)}(\theta)$  die Koinzidenzzählrate (Koinzidenzen pro Messintervall),  $C^{(acc)}$  die Zahl der Zufälligen Koinzidenzen für das gleiche Zeitintervall und  $N^{(rot)}(\theta)$  und  $N^{(blau)}(\theta)$  die Einzelzählraten während dieses Zeitintervalls darstellen. Die Summe läuft hierbei über alle 6 Messungen eines Winkels  $\theta$ .

Diese Normierung auf die Einzelzählraten  $N^k = Z \cdot \Omega^k \cdot \epsilon^k$  ( $k = \text{„rot“}, \text{„blau“}$ ,  $Z = \text{Zerfallsrate des radioaktiven Präparats}$ ) bewirkt, dass sich wegen  $[C^{(meas)}(\theta) - C^{(acc)}] \propto Z \cdot W(\theta) \cdot \Omega^{rot} \cdot \epsilon^{rot} \cdot \Omega^{blau} \cdot \epsilon^{blau}$  die Detektionswahrscheinlichkeiten  $\epsilon^k$  und die Raumwinkel  $\Omega^k$  herauskürzen. Aus diesem Grund müssen diese Größen, welche auch winkelabhängigen Schwankungen unterliegen können, nicht weiter berücksichtigt werden.

Für die normierten Zählraten bei den verschiedenen Winkeln ergeben sich die in Tabelle 4.3 angegebenen Werte.

Winkel [°]	norm. Zählrate $K(\theta)$ [ $10^{-8}$ ]
90	4,126
120	4,342
150	4,750
180	4,840

Tabelle 4.3: Normierte Zählrate der  $\gamma$  -  $\gamma$ -Winkelverteilung.

Da jede der 4 Winkelpositionen 6 mal erfasst wurde, kann der Fehler der normierten Zählrate durch die Standardabweichung des Mittelwertes beim entsprechenden Winkel  $\theta$  abgeschätzt werden. Diese Standardabweichung des Mittelwertes berechnet sich gemäß der Formel [RDE55] (siehe auch Versuch 1):

$$\sigma\left(\frac{K(\theta)}{6}\right) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left(K_i(\theta) - \left(\frac{K(\theta)}{6}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6(6-1)} \sum_{i=1}^6 \left(K_i(\theta) - \left(\frac{K(\theta)}{6}\right)\right)^2} \quad (4.5)$$

wobei

$$K_i(\theta) = \frac{C_i^{(meas)}(\theta) - C^{(acc)}}{N_i^{(rot)}(\theta) \dot{N}_i^{(blau)}(\theta)} \quad (4.6)$$

der individuellen normierten Zählrate  $K_i(\theta)$  bei diesem Winkel  $\theta$  entspricht. Der Mittelwert ergibt sich entsprechend aus der bereits berechneten normierten Zählrate  $K(\theta)$  (Summe der individuellen Zählraten) dividiert durch 6.

Diese Standardabweichungen können aus dem vorliegenden Datensatz leicht mit EXCEL berechnet werden. Da das aufzutragende  $K(\theta)$  dem 6 fachen des Mittelwertes entspricht, ist auch die Standardabweichung mit 6 zu Multiplizieren um  $\sigma(K(\theta))$  zu erhalten. Es ergeben sich die in Tabelle 4.4 angegebenen Werte.

Winkel [°]	$\sigma\left(\frac{K(\theta)}{6}\right)$ [ $10^{-10}$ ]	$\sigma(K(\theta)) = 6 \cdot \sigma\left(\frac{K(\theta)}{6}\right)$ [ $10^{-10}$ ]	$\sigma(K(\theta))$ in % von $K(\theta)$
90	1,02	6,1	1,5 %
120	1,43	8,6	2,0 %
150	1,84	11,0	2,3 %
180	1,39	8,3	1,7 %

Tabelle 4.4: Fehler (Standardabweichung) der normierte Zählrate der  $\gamma$  -  $\gamma$ -Winkelverteilung.

Die normierten Zählraten inklusive Standardabweichung ergeben sich somit zu:

$$K(90^\circ) = (4,126 \pm 0,061) \cdot 10^{-8} \quad (4.7)$$

$$K(120^\circ) = (4,342 \pm 0,086) \cdot 10^{-8} \quad (4.8)$$

$$K(150^\circ) = (4,75 \pm 0,11) \cdot 10^{-8} \quad (4.9)$$

$$K(180^\circ) = (4,840 \pm 0,083) \cdot 10^{-8} \quad (4.10)$$

### 4.4.3 Vergleich mit der theoretischen Winkelverteilung

Um die gemessenen normierten Zählraten mit der Theorie zu vergleichen, betrachtet man die theoretisch Hergeleitete, an die experimentellen Gegebenheiten angepasste Winkelverteilung aus Gleichung 2.77.

$$K(\theta) = \varsigma \cdot \left\{ 1 + 0,08359 \cdot P_2(\cos(\theta)) + 4,573 \cdot 10^{-3} \cdot P_4(\cos(\theta)) \right\} \quad (4.11)$$

Mit einer Konstanten  $\varsigma$ . Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke für die LEGENDRE-Polynome

$$P_2(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(3 \cdot \cos^2(\theta) - 1) \quad (4.12)$$

$$P_4(\cos(\theta)) = \frac{3}{8} - \frac{15}{4}\cos^2(\theta) + \frac{35}{8}\cos^4(\theta) \quad (4.13)$$

wieder ein, so ergibt sich die theoretische Winkelverteilung als Funktion des Winkels  $\theta$ , welche an die experimentellen Werte gefittet werden kann zu:

$$K(\theta) = \varsigma \cdot \left\{ 1 + 0,08359 \cdot \frac{1}{2}(3 \cdot \cos^2(\theta) - 1) + 4,573 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{3}{8} - \frac{15}{4}\cos^2(\theta) + \frac{35}{8}\cos^4(\theta) \right) \right\} \quad (4.14)$$

wobei die Konstanten  $\varsigma$  der einzige freie Fitparameter ist.

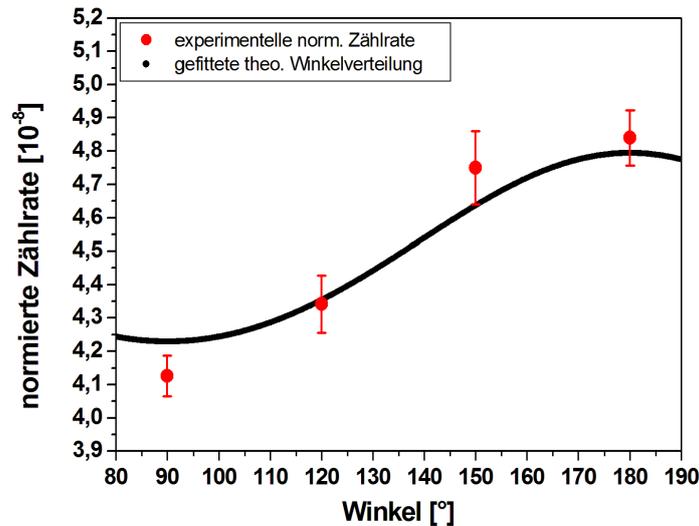


Abbildung 4.4: Vergleich der experimentellen normierten Winkelverteilung mit der theoretisch Berechneten und an die experimentellen wert egefiteten Winkelverteilung.

Abbildung 4.4 zeigt die gemessenen normierten Zählrate mit ihren Fehlerbalken ( $\Delta K(\theta)$ ) und die gefittete theoretische Winkelverteilung.

Der Fitaparameter  $\varsigma$  wurde zu

$$\varsigma = (4,406 \pm 0,012) \cdot 10^{-8} \quad (4.15)$$

bestimmt, so dass sich die gefittete Winkelverteilung zu

$$K(\theta) = 4,406 \cdot 10^{-8} \cdot \left\{ 1 + 0,08359 \cdot \frac{1}{2} (3 \cdot \cos^2(\theta) - 1) + 4,573 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2(\theta) + \frac{35}{8} \cos^4(\theta) \right) \right\} \quad (4.16)$$

ergibt.

Abbildung 4.4 zeigt, dass 3 der Messpunkte im Rahmen ihrer einfachen Standardabweichung gut mit der gefitteten theoretischen Verteilung übereinstimmen. Lediglich ein Messpunkt weicht etwas stärker als die einfache Standardabweichung von der theoretischen Verteilung ab. Dies ist jedoch mit der statistischen Bedeutung der einfachen Standardabweichung als Fehlermaß konsistent, da eine Wahrscheinlichkeit von 31,7 % besteht, dass die normierte Zählrate bei einer erneuten Durchführung der Messung außerhalb der einfachen Standardabweichung liegt. Diese Tatsache zeigt, dass der Verlauf der experimentellen Winkelverteilung im Rahmen der Fehlergrenzen der Messpunkte durch die theoretische Verteilung zwar brauchbar reproduziert wird, die Fehler der vier Messpunkte sind jedoch so groß, dass die theoretische Verteilung hiermit nicht eindeutig bestätigt werden kann, da die Messpunkte im Rahmen der Fehlergrenzen genauso gut (mit einem Vergleichbaren  $\chi^2$ ) durch eine andere Funktion (z.B. eine ansteigende Gerade) gefittet werden könnten.

## Kapitel 5

# Zusammenfassung und Diskussion

Der Versuch hat gezeigt dass es durch den koinzidenten Nachweis der beiden Gammaquanten der  $\gamma - \gamma$ -Kaskade des radioaktiven Zerfalls von  $^{60}\text{Co}$  in  $^{60}\text{Ni}$  prinzipiell möglich ist die Winkelverteilung der Gammastrahlung zu messen. Solange die Lebensdauer des Zwischenniveaus gering genug ist, ist dieses Verfahren auch für  $\gamma - \gamma$ -Kaskaden anderer Zerfälle anwendbar und stellt somit ein Verfahren dar, mit dem die theoretischen Winkelverteilungen ohne großen Aufwand bestätigt werden können. Theoretisch ist es möglich unter Einbeziehung tabellierter Werte für den Raumwinkelbereich und die Nachweiseffizienz der Detektoren für die verschiedenen energetischen Gammaquanten, die im Experiment erwartet Winkelverteilung bis auf einen konstanten Faktor vorherzusagen. Da die Winkelabhängigkeit der theoretischen Winkelverteilung zwischen Maximum und Minimum im vorliegenden Fall mit etwa 12,6 % vom Mittelwert relativ gering ist, fallen die durch die geringe Messdauer und die daraus resultierende schlechte Messstatistik entstehenden relativ großen Fehler der Messpunkte besonders ins Gewicht. Aus diesem Grund ist es mit der Durchgeführten Messung mit einem mittleren Fehler von 1,9 % leider nicht möglich den theoretischen Verlauf der Winkelverteilung eindeutig zu bestätigen. Die theoretisch berechnete Winkelverteilung reproduziert jedoch die Messwerte im Rahmen der Fehlergrenzen recht gut.

Um den Verlauf der theoretischen Funktion bestätigen zu können reichen prinzipiell 4 Messpunkte aus, da es sich um eine Polynom 4 Grades mit ausschließlich geradzahligem Exponenten handelt [Num10]. Diese Aussage ist jedoch nur für die Interpolation von fehlerlosen Punkten brauchbar, da bei einem Fit mehr Messpunkte die Zahl der Freiheitsgrade ( $F$ ) erhöhen und damit das Qualitätsmaß  $\chi^2/F$  unter der Annahme eines gleichbleibenden  $\chi^2$  verkleinern, also verbessern. Es bringt also einen Vorteil die Zahl der Messpositionen zu vergrößern, viel wichtiger ist es jedoch, dass die Messstatistik der einzelnen Punkte verbessert wird, da nur dann eine exakte Bestimmung des Fitparameters  $\varsigma$  möglich ist. Eine erste Möglichkeit um eine bessere Messstatistik zu erhalten, wäre die Verwendung einer Quelle mit höherer Aktivität, was jedoch auch die Zahl der zufälligen Koinzidenzen erhöhen würde, so dass hierdurch nur in einem gewissen Rahmen ein Vorteil entsteht. Eine besser Möglichkeit wäre die Messzeit zu erhöhen, da auf diese Weise die Messstatistik ohne negative Nebeneffekte erhöht werden kann. Dies ist jedoch im Rahmen des Praktikum aus Zeitgründen nicht möglich.

Neben diesen Statistischen Fehlern müssen auch eine Reihe systematischer Fehlerquellen berücksichtigt werden. Die Zufälligen Koinzidenzen wurden hierbei bei der Berechnung der normierten Zählrate bereits herauskorrigiert. Da deren Anzahl innerhalb des Messintervalls deut-

lich geringer als die der realen Koinzidenzen ist, kann hier angenommen werden, dass dies ohne großen Fehler möglich ist. Da sich die Detektionswahrscheinlichkeiten  $\epsilon^k$  und die Raumwinkel  $\Omega^k$  bei der Berechnung der normierten Zählrate herauskürzen, sollten auch diese keinen merklichen Beitrag zum systematischen Fehler liefern. Mögliche systematische Fehlerquellen, welche die normierte Zählrate verringern, sind jedoch in der elektronischen Bestimmung der Koinzidenzen zu finden, da hier auf Grund der Überlagerung der beiden Photopeaks des  $^{60}\text{Co}$ -Spektrums, nicht alle Ereignisse, welche zur jeweiligen primären Gammaenergie gehören auch durch das jeweilige Fenster des SCA erfasst werden können. Werden zum Beispiel zwei koinzidente Gammaquanten detektiert und das Signal des einen Detektors liegt im entsprechenden Fenster des SCA, das Signal des anderen Detektors liegt jedoch im überlagerten Bereich der beiden Peaks und damit außerhalb des SCA-Fensters des anderen Detektors, so registriert zwar der erste Detektor ein Ereignis, die Koinzidenz wird jedoch gemäß der Einstellung der Elektronik ignoriert, was zu einer systematischen Verringerung der normierten Koinzidenzzählrate führt. Zu einem ähnlichen Fehler kommt es, wenn eines der koinzidenten Gammaquanten ein Comptonereignis auslöst und daher vom jeweiligen Detektor nicht akzeptiert wird. Ein weiterer solcher systematischer Fehler kann durch die Anpassung der Zeitverzögerung und durch die Zeitauflösung der Elektronik zu Stande kommen. Die Zeitverzögerung der Signale wurde zwar auf den Wert eingestellt, welcher die maximale Zahl an Koinzidenzen liefert. Die zu Grunde liegende Messung war jedoch mit einem recht großen Fehler behaftet, so dass hier eine genauere Anpassung zu einer weiteren Erhöhung der Koinzidenzzählrate führen kann. Weitere mögliche (kleinere) Fehlerquellen liegen in der Tatsache, dass zur Korrektur der theoretischen Verteilung nur approximierten Werte verwendet wurden, da die tabellierten Werte nur in groben Intervallen vorliegen. Die beschriebenen systematischen Fehler sind in erster Näherung unabhängig vom Winkel und beeinflussen die normierte Zählrate daher lediglich um einen konstanten Faktor.

Insgesamt hat der Versuch einen guten Überblick über die Winkelverteilung und Eigenschaften von Gammastrahlung und Multipolstrahlung im Allgemeinen, aber auch über die Charakteristiken von  $\gamma - \gamma$ -Kaskaden in radioaktiven Zerfällen gegeben.

# Literaturverzeichnis

- [An11] S. Schippers, „*Anleitung zum Praktikum Atom- und Quantenphysik*“, (Institut für Atom- und Molekülphysik, JLU Gießen, 2011)
- [MRR95] G. Musiol, J. Ranft, R. Reif und D. Seliger, „*Kern- und Elementarteilchenphysik*“, 2. Auflage (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main , 1995)
- [Leo87] W. R. Leo, „*Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments - A How-To Approach*“, (Springer-Verlag, 1987).
- [NNK11] Marianna Nanova, Rainer Novotny, „*Anleitung: Physikpraktikum für Studierende der Human- und Zahnmedizin*“, JLU Gießen (SoSe 2011)
- [PDG10] Particle Data Group, *Particle Physics Booklet* (2010)
- [PDG02] Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/2002/celebrpp.pdf> (web page)
- [HWT75] H. W. Thümmel, *Isotopenpraxis Isotopes in Environmental and Health Studies Volume 11, Issue 3* (1975)
- [Sch98] F. Schwabl, *Quantenmechanik*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1998)
- [CDL99] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantenmechanik 2*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1999)
- [ABG65] M. Yates, *Alpha-, Beta- and Gamma- Ray Spectroscopy*, Volume 3, Appendix 9, North Holland (1965)
- [RDE55] R. D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw Hill (1955)
- [Num10] T. Sauer, *Skript zur Vorlesung Numerik 1 + 2*, JLU Gießen (WS 10/11 + SS 11)