Lösungsblatt 1
zur Experimentalphysik I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1 Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch:

Die Übungen beziehen sich auf die Vorlesung Physik I im Sommersemester 2014 von Prof. Thomas Aumann und das Script von Prof. Walther. Es gibt Präsenzübungen, die in der Übungsstunde gerechnet werden, und bepunktete Hausübungen, die in der nächsten Übung abgegeben und korrigiert werden. Wegen Ostermontag besteht das erste Blatt nur aus Hausübungen.

Auch wenn die Übungen, genau wie die Vorlesung selbst, freiwillig und zum Bestehen des Moduls nicht erforderlich sind, wird dringendst empfohlen diese regelmäßig abzugeben. Denn wir beobachten immer wieder, dass diejenigen Studenten, welche die Übungsaufgaben im Semester regelmäßig abgegeben haben, die Klausur bestehen, während die Anderen Schwierigkeiten haben. Ein Verschieben der Übungen auf die „Klausur-Lernphase" führt meistens dazu, dass die Übungen in kürzerer Zeit weniger gewissenhaft bearbeitet werden. Außerdem fällt der Selbstvergleich mit der Musterlösung meistens zu optimistisch aus („Na ja im Prinzip habe ich das ja genau so.", statt: „Meine Lösung ist falsch."), die Überraschung folgt dann in der Klausur.

Die Übungen werden sowohl einfache als auch anspruchsvolle Aufgaben mit „ein wenig Würze" enthalten. Das machen wir, weil Sie mit sehr unterschiedlichem Vorwissen hier sind und sich niemand langweilen oder komplett abgehängt werden soll. Also Don't Panic! Es ist kein Beinbruch, wenn Sie nicht alle Übungsaufgaben lösen können, sondern etwas ganz Normales. Sie werden das in Ihrem Physikstudium noch öfter erleben. Vielleicht fehlt Ihnen auch nur die richtige Lerngruppe oder ein wenig Übung um den richtigen Trick zu finden.

An dieser Stelle soll noch einmal ausdrücklich gesagt werden: Wir möchten, dass möglichst alle von Ihnen die Klausur bestehen. Dafür haben wir ein Team, das Ihnen dabei hilft. Nutzen Sie es! Stellen Sie viele Fragen, die Übungsgruppenleiter stehen Ihnen dazu innerhalb der Übungszeiten und separaten Sprechzeiten zur Verfügung.

Die Übungsblätter sowie die Lösungen, eventuelle Errata und Tipps finden Sie in Ihrer Übungsgruppe in TUCaN sowie auf meiner Homepage http://www.dsemmler.de. Und jetzt: Viel Spaß beim Lösen!

Ihr *Diego Semmler*

Aufgabe 1.2 Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Ausdrücke, falls diese existieren: (4 Punkte)

a) $\sqrt{4\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}} = \pm 2\cdot e^{\frac{\pi}{8}i}$

b) $(1+i)^4 = -4$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\exp(1+ix)\right) = e\cdot \lim_{x\to\infty}(e^{ix}) \quad\Rightarrow\quad$ Existiert nicht.

d) $\lim\limits_{x\to i}\left(\frac{x^2+x-i+1}{x-i}\right) \overset{l'Hospital}{=} \lim\limits_{x\to i}\left(\frac{2x+1}{1}\right) = 1+2i$

Aufgabe 1.3 Heinz' und Joes Urlaubsreise (1 Punkt)

Heinz und Joe möchten in den Urlaub fahren und dabei das sparsamere Fahrzeug verwenden. Heinz' Auto benötigt bei sparsamer Fahrweise 5,5 $\frac{\text{Liter}}{100\text{ km}}$. Joes Auto stemmt aus den USA, wo es üblich ist den Kraftstoffverbrauch in Miles per Gallon an zu geben. Joes Auto fährt 78,42 $\frac{\text{miles}}{\text{gallon}}$. Welches Auto ist sparsamer?

Tipp: Rechnen Sie mit 1 Gallone = 3,7854 Liter und 1 Meile = 1,609 km.

Joes Auto benötigt $\frac{1}{78{,}42}\ \frac{\text{gallons}}{\text{mile}} = 0{,}01275\ \frac{3{,}7854\text{ Liter}}{1{,}609\text{ km}} = 0{,}03\ \frac{\text{Liter}}{\text{km}} = 3\ \frac{\text{Liter}}{100\text{ km}} < 5\ \frac{\text{Liter}}{100\text{ km}}$
Damit ist Joes Auto sparsamer.

Aufgabe 1.4 Achilles und die Schildkröte (2 Punkte)

Achilles und seine Schildkröte veranstalten ein Wettrennen auf einer Länge von 100 m um einen Kopf Salat. Achilles ist ein schneller Läufer und läuft 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Schildkröte ist mit 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ etwas gemütlicher unterwegs. Die Schildkröte schmunzelt und behauptet: „Wenn du mir 10 m Vorsprung gibst, gewinne ich das Rennen. Schau: Während du die 10 m läufst, laufe ich einen Meter. Während du diesen läufst, laufe ich ein weiteres Stück. Während du dieses läufst, laufe ich das nächste Stück und so weiter. Du kannst mich also niemals einholen.“. Achilles sagt darauf hin zu der Schildkröte: „Das ist doch Quatsch. Wenn du langsamer bist hole ich dich irgendwann ein. Das wirst du schon noch sehen.“

a) Wer hat Recht und warum?

In diesem Fall hat Achilles Recht. Die Schildkröte konstruiert zwar eine unendlich lange Summe. Diese hat aber einen endlichen Wert; (Wir sagen heute dazu: Sie konvergiert.) und gibt genau die Strecke an, nach der Achilles die Schildkröte überholt. Tatsächlich hat die Schildkröte nicht bewiesen, dass Achilles sie nicht überholen kann, sondern lediglich ihren Überholpunkt konstruiert.

b) Holt Achilles die Schildkröte nach einer endlichen Zeit ein und wenn ja, wann und wo?

Nach der Logik von a) können wir also schreiben:

$$s = 10\ \mathrm{m} + 1\ \mathrm{m} + 0{,}1\ \mathrm{m} + 0{,}01\ \mathrm{m} + \ldots = 11{,}111\ldots\ \mathrm{m} = \frac{100}{9}\ \mathrm{m}$$

Diese läuft Achilles in $\frac{100}{9}\ \mathrm{m} \,/\, \left(10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = \frac{10}{9}\ \mathrm{s}$.

Aufgabe 1.5 Kurts Klausur 1. Teil (2 Punkte)

Kurt wirft ein 1 kg schweres Hufeisen senkrecht in die Luft, weil er glaubt, dass es ihm Glück für seine bevorstehende Physikprüfung bringt. Beim Abwurf hat das Hufeisen eine Geschwindigkeit von 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Sei $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

a) Wie hoch wirft Kurt sein Hufeisen?

$$v = at + v_0 = -gt + v_0 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g} = \frac{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1\ \mathrm{s}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t = -5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\ \mathrm{s})^2 + 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{m}$$

b) Wie lange hat Kurt Zeit weg zu gehen, bevor ihm das Hufeisen auf den Kopf fällt und er wegen starker Kopfschmerzen nicht mehr an der Prüfung teilnehmen kann?

Das Hufeisen fliegt 1 s lang hoch und benötigt die gleiche Zeit um wieder herunter zu fliegen. Also hat Kurt 2 s lang Zeit.

Aufgabe 1.6 Kurts Klausur 2. Teil (5 Punkte)

Nach bestandener Prüfung bekommt Kurt von seinen Eltern einen Ferrari geschenkt. Dessen Beschleunigung hängt von der Geschwindigkeit ab und ist allgemein geschrieben $a_b = \frac{x}{v}$. Durch Reibung und Luftwiderstand wird der Wagen mit einer Beschleunigung $a_w = -y \cdot |v|$ abgebremst.

a) Erstellen und lösen Sie eine Differentialgleichung, welche die Geschwindigkeit des Wagens bei Vollgas in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

$a(v) = \frac{x}{v} - yv = \frac{dv}{dt}$. Trennung der Variablen ergibt: $\int \frac{dv}{\frac{x}{v} - yv} = \int dt \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2y} \cdot \ln(x - yv^2) + C' = t \quad \Leftrightarrow$
$v = \sqrt{\frac{1}{y} \cdot \left(x - C \cdot e^{-2yt}\right)}$

b) Sei ab jetzt $x = 640 \, \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$ und $y = 0{,}1 \, \frac{1}{\mathrm{s}}$. Wie schnell ist der Ferrari?

Es gilt $a(v) = a_b + a_w = \frac{x}{v} - y \cdot v = 0$. Der Betrag kann hier weggelassen werden, da wir ohne Einschränkungen davon ausgehen können, dass der Ferrari vorwärts fährt. Nach v aufgelöst bekommt man

$$v = \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{640 \, \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}}{0{,}1 \, \frac{1}{\mathrm{s}}}} = \sqrt{6400 \, \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 80 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 288 \, \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

c) Wie lange benötigt Kurts Ferrari mit den Werten aus Teil b) um von 0 auf 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ zu beschleunigen?

Mit der Lösung aus a) und der Anfangsbedingung $v = 0$ folgt durch einsetzen:

$$C = x \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \left(1 - e^{-2yt}\right)} \quad \text{Durch Auflösenerhält man:} \quad t = \frac{-1}{2y} \ln\left(1 - v^2 \frac{y}{x}\right) = 0{,}6424 \text{ s}$$

Aufgabe 1.7 Vorsicht Baustelle (6 Punkte)

Der Zug von Frankfurt nach Darmstadt benötigt normalerweise 20 Minuten Zeit. Seine Reisegeschwindigkeit beträgt 72 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Die Brems- bzw. Anfahrtsbeschleunigung beträgt 0,2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und 0,1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Bitte berücksichtigen Sie diese in Ihrer Rechnung! Aufgrund einer Baustelle, die mit maximal 18 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ passierbar ist, verspätet sich der Zug seit einigen Tagen um 3 Minuten. Die Baustelle ist etwa in der Mitte der Strecke, sodass sie annehmen dürfen, dass der Zug vor und nach der Baustelle seine volle Reisegeschwindigkeit erhält.

a) Wie lang ist die Baustelle?

Der Zug fährt 20 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ außerhalb und 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ innerhalb der Baustelle. Die zusätzliche Zeit, die der Zug benötigt entsteht sowohl innerhalb der Baustelle als auch während der Beschleunigungs- und Abbremsphase. Letztere sind nicht von der Länge der Baustelle abhängig. Zum Abbremsen benötigt der Zug 15 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} / \left(0{,}2 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 75$ s. Zum Beschleiunigen benötigt der Zug 15 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} / \left(0{,}1 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 150$ s. Andererseits legt der Zug in dieser Zeit auch eine gewisse Strecke zurück für die er auch im Normalbetrieb eine gewisse Zeit braucht. Die Strecke zum Verzögern ist:

$$s_v + = \frac{1}{2} a_v t^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \left(-0{,}2 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot (75 \text{ s})^2 + 20 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 75 \text{ s} = 937{,}5 \text{ m}$$

Analog dazu beträgt die Strecke zum Beschleunigen 1875 m. Für beide Strecke benötigt der Zug normalerweise $\frac{2812{,}5}{20 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 140{,}625$ s. Damit ergibt sich eine zusätzlich benötigte Zeit von 150 s + 75 s - 140,625 s = 84,375 s. Die zusätzliche Zeit, welche der Zug in der Baustelle selbst verbringt ist $t_z = 95{,}625$ s.

Diese lässt sich in Abhängigkeit der Länge der Baustelle angeben. Denn $t_z = t_{bau} - t_{norm} = \frac{l}{v_{bau}} - \frac{l}{v_{norm}} \quad \Leftrightarrow$

$$l = \frac{t_z}{\frac{1}{v_{bau}} - \frac{1}{v_{norm}}} = 637{,}5 \text{ m}$$

b) Wie hoch ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

Zunächst wird die Länge der Bahnstrecke ausgerechnet. Diese setzt sich zusammen aus der Beschleunigungs- und Abbremsstrecke sowie aus der Strecke, die mit normaler Geschwindigkeit gefahren wird zusammen.
Die Beschleunigungsstrecke aus dem Stand ist gegeben durch $s_a = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right) = \frac{v^2}{2a}$. Die Um von 0 auf $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ zu beschleunigen benötigt der Zug $t = \frac{v}{a} = 200$ s. Zum Verzögern benötigt er analog 100 s. Damit fährt er $20 \cdot 60$ s - 300 s = 900 s mit voller Geschwindigkeit. Die Gesamtstrecke errechnet sich als die Summe aus diesen 3 Strecken und ist

$$s = \frac{\left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + \left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot 900\ \text{s} + \frac{\left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2000\ \text{m} + 18\,000\ \text{m} + 1000\ \text{m} = 21\ \text{km}$$

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{21\,000\ \text{m}}{1380\ \text{s}} = 15{,}22\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 54{,}78\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

c) Zeichnen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm, ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm und ein Beschleunigungs-Zeit-Diagramm.